PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 23. 22. November 1909. Redaktionsschluß für No. 24 am 29. November 1909. 10. Jahrgang.

INHALT.

Originalmitteilungen:

K. W. Wagner, Der Verlauf telegraphischer Zeichen in langen Kabeln. S. 865.

Beiträge zur Kenntnis der gekoppelten elektrischen Systeme.

I. J. Kaiser, Das Sendesystem. S. 886.

II. G. Heinecke, Das Empfangssystem. S. 893.

B. Gáti, Die Empfindlichkeit des Barretters. S. 897.

H. Zöllich, Über die Empfindlichkeit von Barretteranordnungen. S. 899.

J. Stark, Zur experimentellen Entscheidung zwischen Atherwellen- und Lichtquantenhypothese. I. Röntgenstrahlung. S. 902.

R. W. Wood, Absorption, Fluoreszenz und magnetische Drehung des Natriumdampfes im Ultraviolett. S. 913.

R. W. Wood, Interferenzerscheinungen von hoher Reinheit an Kristallen von Kaliumchlorat. S. 916.

P. Ehrenfest, Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie. S. 918.

Vorträge und Diskussionen von der 81. Naturforscherversammlung zu Salzburg:

Abteilung für Geophysik, Meteorologie und Erdmagnetismus:

W. Krebs, Das meteorologische Jahr 1908/09. S. 918.

W. Krebs, Abyssotektonik, besonders der Ozeane. S. 920.

Zusammenfassende Berichte:

A. Byk, Neuere Fortschritte in der Farbenphotographie. S. 921.

Physikalische Technik:

Th. Wulf, Kalziumkarbid als Trockenmittel bei elektrostatischen Arbeiten. S. 926.

G. Rempp u. R. Wenger, Über eine einfache und auf größere Entfernungen brauchbare mechanische Kraftübertragung für rasch rotierende Apparate von geringer Leistung. S. 926.

Besprechungen:

M. Brillouin, Vorlesungen über die Viskosität der Flüssigkeiten und Gase. S. 927.

F. Stolze, Die Panoramenapparate. S. 927.

C. G. Knott, Die Physik der Erdbebenerscheinungen. S. 927.

J. Joly, Radioaktivität und Geologie. S. 928.

J. N. Friend, Die Valenztheorie. S. 928.

Tagesereignisse. S. 928.

Personalien. S. 928.

Gesuche. S. 928.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Der Verlauf telegraphischer Zeichen in langen Kabeln.

(Mitteilung aus dem Kaiserl. Telegraphen-Versuchsamt.)

Von Karl Willy Wagner.

Inhaltsübersicht.

1. Problemstellung.
2. Entwicklung der grundlegenden Beziehungen.
3. Die Berücksichtigung des inneren Widerstandes der Batterie.
4a. Abschluß des Kabels durch einen Kondensator am Empfangsende.
4b. Abschluß des Kabels durch einen Kondensator am Geberende.
4c. Doppelseitiger Abschluß des Kabels durch Kondensatoren.
5. Näherungsformeln für den Fall, daß die Abschlußkapazität klein ist gegenüber der Kabelkapazität.
6. Induktionsspule am Empfängerende.
7. Rückblick über die leitenden Gedanken bei den im vorhergehenden ausgeführten Rechnungen; allgemeine Bemerkungen.
8. Zahlenbeispiele für den Einfluß des Batteriewiderstands und für den des einseitigen und des doppelseitigen Abschlusses durch Kondensatoren.
9. Experimentelle Bestätigung der berechneten Kurven.
10. Anwendung auf die Kabeltelegraphie; die Form des Elementarzeichens; einfache Erklärung der Wirkungsweise der zum Empfänger parallel geschalteten Induktionsspule und des Nutzens der doppelseitigen Blockierung durch Kondensatoren; zusammengesetzte Zeichen.

1. Die erste Abhandlung über den Verlauf telegraphischer Zeichen in langen Unterseekabeln ist vor über 50 Jahren von W. Thomson[1]) veröffentlicht worden. In ihr wird zuerst gezeigt, wie durch die Wirkung der Kapazität und des Ohmschen Widerstands im Kabel die telegraphischen Zeichen nicht nur verzögert, sondern auch verbreitert am fernen Ende ankommen, so daß die zulässige Telegraphiergeschwindigkeit um so geringer wird, je größer das Produkt aus dem Widerstande und der Kapazität des Kabels ist. In der Theorie von Thomson sind die denkbar einfachsten Grenzbedingungen angenommen: das Kabel soll durch eine widerstandslose Batterie gespeist und am fernen Ende durch eine widerstandslose Brücke mit der Erde verbunden sein. Die Thomsonsche Theorie kann daher keine Rechenschaft von dem Einfluß der an den Kabelenden tatsächlich verwendeten Schaltungen und Apparate geben.

Ein Näherungsverfahren, den Stromverlauf in Kabeln mit Berücksichtigung der an den Enden verwendeten Schaltung zu untersuchen, hat Breisig[2]) angegeben. Er denkt sich das einzelne telegraphische Zeichen in so großen Zeitintervallen wiederholt, daß jedes Zeichen im Kabel merklich abgeklungen ist, bevor das folgende einsetzt. Der ganze Vorgang hat dann eine zeitliche Periode von jenem großen Intervall und kann somit nach den einfachen und wohlbekannten Gesetzen behandelt werden,

1) W. Thomson, Lond. Roy. Soc. Proc. 1855; Phil. Mag. (4) 11, 146, 1856; Math. and phys. papers 2, 61.

2) F. Breisig, Elektrot. Zeitschr. 31, 1046, 1900.

die für dauernde Wechselströme gültig sind. Das Verfahren hat den Vorzug, daß es auch bei noch so komplizierten Schaltungen an den Enden kaum etwas von seiner Einfachheit einbüßt.

In dieser Abhandlung soll nun gezeigt werden, wie man auch auf dem von Thomson eingeschlagenen Wege weiterschreiten und wenigstens für eine Reihe einfacher Schaltungen strenge Lösungen angeben kann. Die Verfolgung dieses Weges verlohnt sich auch noch besonders deshalb, weil man hier aus dem Wesen der Rechnung eine tiefe Einsicht in das Spiel der elektrischen Ausgleichsvorgänge in dem aus dem Kabel und den Endapparaten bestehenden Systeme gewinnt.

2. Bei so langsam verlaufenden Vorgängen, wie es die telegraphischen Zeichen sind, darf man sich das Kabel einfach als einen Leiter vorstellen, der Kapazität und Ohmschen Widerstand auf der Länge gleichmäßig verteilt trägt; die Wirkung der Selbstinduktivität ist überall zu vernachlässigen (außer zuweilen am Geberende, unmittelbar nach einem plötzlichen äußeren Eingriff, wenn man etwa dort die Spannung zwingt, sich sehr schnell zu ändern). Ebenso soll von einer etwa vorhandenen Leitfähigkeit des Dielektrikums abgesehen werden. Dann ist, wenn r und C Ohmschen Widerstand und Kapazität der Längeneinheit bedeuten, $\bar{i}$ der Strom und $\bar{v}$ die Spannung gegen Erde in der Entfernung x vom Geberende zur Zeit t ist,

$$-r\bar{i}=\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \qquad \text{(Ia)}$$

$$-\frac{\partial \bar{i}}{\partial x}=C\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}. \qquad \text{(Ib)}$$

Dabei ist angenommen, daß der Strom $\bar{i}$ im Sinne wachsender x fließe. Aus (Ia) und (Ib) folgt

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}=rC\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}. \qquad \text{(IIa)}$$

Es ist bequem und vereinfacht die Rechnungen, wenn man für die Zeit t ein neues Maß durch die Gleichung

$$T=\frac{t}{rC} \qquad \text{(III)}$$

einführt. Dann lautet (IIa)

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}=\frac{\partial \bar{v}}{\partial T}. \qquad \text{(IIb)}$$

Die hier zu betrachtenden Vorgänge sind derart, daß sich zunächst das aus Kabel und Endapparaten bestehende System in einem gewissen stationären elektrischen Zustande befindet. Dieser wird im Moment $t=0$ dadurch gestört, daß am Geberende eine elektromotorische Kraft zu- oder abgeschaltet wird oder überhaupt irgendwelche Grenzbedingungen geändert werden. Diesen abgeänderten Bedingungen entspricht auf dem Kabel eine neue stationäre Strom- und Spannungsverteilung i_s und v_s, die sich aus Ia bis IIb finden läßt und die nach sehr langer Zeit auch wirklich eintritt. In der Zwischenzeit verlaufen $\bar{v}$ und $\bar{i}$ so, daß ein stetiger Anschluß der zur Zeit $t=0$ geltenden Werte an die stationären Werte v_s und i_s erreicht wird. Man kann sich nun den Vorgang so vorstellen, als ob die stationären Werte v_s und i_s schon von Anfang an vorhanden seien, daß sich ihnen aber ein unstationärer Vorgang mit dem Strome i und der Spannung v so überlagert, daß für $t=0$ gerade die vorgeschriebenen Werte $\bar{i}$ und $\bar{v}$ herauskommen, und daß die i und v mit der Zeit unmerklich klein werden. Also

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}&=v+v_s\\ \bar{i}&=i+i_s\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

Diese Spaltung der wirklichen Werte $\bar{v}$ und $\bar{i}$ erweist sich als bequem für die Rechnung und übersichtlich für die Anschauung. Da schon v_s und i_s Lösungen der linearen Differentialgleichungen (Ia) und (Ib) sind, so folgt, daß auch v und i diesen Gleichungen genügen müssen. Ein zweckmäßiger Ansatz für v, so daß diese Größe mit der Zeit verschwindet, ist

$$v=e^{-\lambda^2 T}\varphi(x),$$

λ bedeutet eine Konstante, φ eine Funktion von x allein. Hieraus und aus (IIb) erhält man für $\varphi(x)$ die Differentialgleichung

$$\varphi''(x)+\lambda^2\varphi(x)=0. \qquad \text{(Va)}$$

Der allgemeinste Ansatz für φ ist demnach

$$\varphi(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x, \qquad \text{(Vb)}$$

wo a und b Konstanten sind.

Aus dem Ansatz für v und Gleichung (Ia) ergibt sich

$$i=-\frac{1}{r}e^{-\lambda^2 T}\varphi'(x)$$

mit

$$\varphi'(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx}=a\lambda\cos\lambda x-b\lambda\sin\lambda x. \qquad \text{(Vc)}$$

Für jeden speziellen Wert, den wir dem Parameter λ zulegen, erhalten wir eine spezielle Lösung v, i. Da die Differentialgleichungen (Ia) und (Ib) linear sind, so ergibt sich eine Lösung von allgemeinerem Charakter durch Superposition einer ganzen (im allgemeinen unendlichen) Reihe solcher Lösungen:

$$v=\Sigma e^{-\lambda^2 T}\varphi(x) \qquad \text{(VIa)}$$

$$i=-\frac{1}{r}\Sigma e^{-\lambda^2 T}\varphi'(x). \qquad \text{(VIb)}$$

Welche Werte dem Parameter λ hierin zuzulegen sind, hängt natürlich vom besonderen Problem (d. h. von der Schaltung an den Enden des Kabels) ab, und es ist gerade der Zweck dieser Abhandlung zu zeigen, wie man

in speziellen Fällen die Reihen VIa und VIb wirklich berechnet.

Zu dem Ende bedürfen wir zunächst einiger allgemeiner Sätze über die Funktionen φ, die wir nach dem Vorgange von Lord Rayleigh[1]) als Normalfunktionen des betreffenden Problems bezeichnen. Unterscheiden wir zwei Parameter λ und ihre zugehörigen Funktionen φ durch die Indizes ν und μ, so erhält man aus der definierenden Gleichung (Va) durch Integration über die ganze Kabellänge ($x = 0$ bis $x = l$) die Beziehungen[2])

$$(\lambda_\mu^2 - \lambda_\nu^2) \int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu \, dx = [\varphi_\mu \varphi_\nu' - \varphi_\nu \varphi_\mu']_0^l \quad \text{(VIIa)}$$

$$(\lambda_\mu^2 - \lambda_\nu^2) \int_0^l \varphi_\mu' \varphi_\nu' \, dx = [\lambda_\mu^2 \varphi_\mu \varphi_\nu' - \lambda_\nu^2 \varphi_\nu \varphi_\mu']_0^l. \quad \text{(VIIb)}$$

Durch diese Gleichungen ist das bestimmte Integral des Produkts zweier Normalfunktionen oder ihrer ersten Ableitungen, genommen über die ganze Kabellänge, ausgedrückt durch die Werte jener Funktionen an den Kabelenden. Diese Integrale braucht man bei der Bestimmung der Konstanten in den Reihen (VIa) und (VIb). Außerdem sind dazu auch die Integrale

$$\int_0^l \varphi_\nu^2 \, dx \quad \text{und} \quad \int_0^l \varphi_\nu'^2 \, dx$$

nötig. Man kann ihre Werte nicht einfach dadurch erhalten, daß man in (VIIa) und (VIIb) $\mu = \nu$ setzt, weil dann die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ herauskommt. Dagegen kommt man zum Ziel, wenn man setzt[3])

$$\lambda_\mu^2 = \lambda_\nu^2 + d(\lambda_\nu^2).$$

Dann ist

$$\varphi_\mu = \varphi_\nu + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial (\lambda_\nu^2)} d(\lambda_\nu^2) = \varphi_\nu + \frac{1}{2\lambda_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \lambda_\nu} d(\lambda_\nu^2)$$

$$\varphi_\mu' = \varphi_\nu' + \frac{\partial \varphi_\nu'}{\partial (\lambda_\nu^2)} d(\lambda_\nu^2) = \varphi_\nu' + \frac{1}{2\lambda_\nu} \frac{\partial \varphi_\nu'}{\partial \lambda_\nu} d(\lambda_\nu^2)$$

und hiermit ergibt sich aus (VIIa) und (VIIb)

$$\int_0^l \varphi_\nu^2 dx = \frac{1}{2\lambda_\nu} \left[\varphi_\nu' \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \lambda_\nu} - \varphi_\nu \frac{\partial \varphi_\nu'}{\partial \lambda_\nu} \right]_0^l \quad \text{(VIIc)}$$

$$\int_0^l \varphi_\nu'^2 dx = \left[\varphi_\nu \varphi_\nu' + \varphi_\nu' \frac{\lambda_\nu}{2} \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \lambda_\nu} - \varphi_\nu \frac{\lambda_\nu}{2} \frac{\partial \varphi_\nu'}{\partial \lambda_\nu} \right]_0^l. \quad \text{(VIId)}$$

1) „Theory of Sound" I, Art. 92, S. 118. London 1894 bei Macmillan & Co.

2) K. W. Wagner, „Elektromagn. Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln", S. 65. Leipzig 1908.

3) Mit dieser Grenzwertsbestimmung hat die Tatsache nichts zu tun, daß die λ an sich nicht stetig veränderliche, sondern diskrete Werte sind.

Nun sind wir im Besitz des mathematischen Handwerkzeugs zur Behandlung spezieller Probleme.

3. Die Berücksichtigung des inneren Widerstandes der Batterie.

Um an einem möglichst einfachen Beispiel die Anwendung der hier in Frage kommenden Methoden zu erläutern, behandeln wir das ursprüngliche Thomsonsche Problem, jedoch mit Berücksichtigung des endlichen inneren Widerstands der Geberbatterie (Fig. 1[1])). Die Annahme eines einfach kurzgeschlossenen Endes entspricht nicht den wirklichen Verhältnissen. Wenn wir aber bedenken, daß das weitentfernte Ende die Zustände am Kabelanfang nicht merklich beeinflußt, so dürfen wir das Ergebnis der Rechnung besonders für den Kabelanfang als sehr nahe zutreffend betrachten. Gerade die hier herrschenden Vorgänge werden aber durch die Thomsonsche Theorie nicht richtig wiedergegeben; denn diese gibt für $t = 0$ und $x = 0$ das physikalisch sinnlose Resultat $i = \infty$ infolge der den Tatsachen nicht entsprechenden Grenzbedingung.

Wir denken uns im Moment $t = 0$ durch Schließen des Schalters S einen Stromstoß in das als ungeladen vorausgesetzte Kabel hineingeschickt und fragen nach dem zeitlichen Verlauf und der räumlichen Verteilung der dadurch im Kabel hervorgebrachten Störung.

Ist E die elektromotorische Kraft der Batterie und R_0 ihr innerer Widerstand, so ist der schließlich eintretende stationäre Wert des Stromes

$$i_s = \frac{E}{R_0 + rl}. \quad \text{(1a)}$$

Der stationäre Endwert der Spannung im Kabel ist

$$v_s = E \frac{rl}{rl + R_0} \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad \text{(1b)}$$

Die Anfangsbedingungen sind, da das Kabel im Moment $t = 0$ als strom- und spannungslos vorausgesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} i &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned}\right| \quad \text{für } t = 0.$$

Hiermit ergibt sich (siehe Gl. IV)

$$v = E \frac{rl}{rl + R_0} \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \text{ für } t = 0. \quad \text{(2a)}$$

Die entsprechende Gleichung für i brauchen wir nicht erst hinzuzuschreiben; wir bedürfen ihrer nicht, denn i ist (nach Gl. Ia) durch die Angabe der Verteilung von v schon völlig bestimmt.

Grenzbedingungen. Am fernen Ende ($x = l$) ist wegen des dort angenommenen Kurzschlusses die Spannung zu allen Zeiten null.

1) Die Figuren befinden sich auf den Tafeln XVIII—XX.

$$v = 0 \text{ für } x = l.$$

Da auch $v_z = 0$ für $x = l$ ist, so folgt

$$v = 0 \text{ für } x = l \text{ und alle } T. \qquad (2b)$$

Am Kabelanfang ist

$$v = E - R_0 i$$

und

$$v_z = E - R_0 \frac{E}{R_0 + rl} = E - R_0 i_z,$$

daher

$$v = -R_0 i \text{ für } x = 0 \text{ und alle } T. \qquad (2c)$$

Die Bedingung (2b) läßt sich mit (VIa) nur dann vereinbaren, wenn jedes einzelne Glied der Summe für $x = l$ und beliebige T verschwindet:

$$\varphi(l) = 0. \qquad (3a)$$

Aus (2c) ergibt sich durch Einsetzen der Werte für v und i aus den Gl. (VIa) und (VIb)

$$\varphi(0) = \frac{R_0}{r} \varphi'(0). \qquad (3b)$$

Nun gilt für φ der Ansatz (Vb)

$$\varphi = a \sin \lambda x + b \cos \lambda x$$

Daher ist wegen (3b)

$$b = a \frac{\lambda R_0}{r}.$$

Somit

$$\varphi = a \left(\sin \lambda x + \frac{\lambda R_0}{r} \cos \lambda x \right) \qquad (4a)$$

$$\varphi' = a \left(\lambda \cos \lambda x - \frac{\lambda^2 R_0}{r} \sin \lambda x \right). \qquad (4b)$$

Setzt man nun den sich hieraus ergebenden Wert von $\varphi(l)$ in die Grenzbedingung (3a) ein, so erhält man eine transzendente Gleichung für λ:

$$\sin \lambda l + \frac{\lambda R_0}{r} \cos \lambda l = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \lambda l = -\frac{R_0}{rl} \lambda l. \qquad (4c)$$

Diese Gleichung, in der wir λl als Unbekannte auffassen, hat unendlich viele reelle Wurzeln, über deren Lage man sich einen schnellen Überblick verschafft, wenn man sich in einem kartesischen Koordinatensystem sowohl die Kurvenschar $\operatorname{tg} x$ als auch die Gerade $-\frac{R_0}{rl} x$ aufgetragen denkt (Fig. 2). Jeder der unendlich vielen Schnittpunkte der Geraden mit der Kurvenschar bestimmt eine Lösung von (4c). Zu jeder positiven Lösung gehört aus Symmetriegründen eine gleich große negative Lösung; wir brauchen aber nur die positiven zu berücksichtigen, denn die entsprechende negative Lösung ergibt nach (4a) dieselbe Funktion φ nur mit dem negativen Vorzeichen; den Faktor -1 können wir uns aber in die noch zur Verfügung stehende Konstante a hineingelegt denken. Auch die Lösung $\lambda = 0$ müssen wir außer Betracht lassen; sie entspricht dem schon in Gl. (1b) angegebenen und durch den Ansatz (IV) berücksichtigten stationären Zustande.

Nach Gl. (VIa) haben wir uns den wirklichen Vorgang zusammengesetzt gedacht aus einer ganzen Reihe von Teilwellen, von denen jede einzelne nach einem exponentiellen Zeitgesetz gedämpft ist. Wir sehen nun, daß auf Grund der hier vorliegenden Grenzbedingungen eine unendliche Reihe solcher Teilwellen möglich ist, deren Wellenlängen eben durch die Grenzbedingungen bestimmt sind. Im allgemeinen stehen die Wellenlängen in keinem rationalen Verhältnis (unharmonische Oberwellen). Über die Höhe der einzelnen Teilwellen, die durch die Konstante a ausgedrückt wird, sagen die Grenzbedingungen nichts aus; das muß auch so sein, denn die Form des Vorganges, die in der Stärke der einzelnen Teilwellen zum Ausdruck kommt, richtet sich nach dem Anfangszustande, den wir bei denselben Grenzbedingungen noch willkürlich vorschreiben können.

Bevor wir mit den gefundenen Wellenlängen weiter operieren, ist noch ein Punkt zu beachten. Bei der durch die Fig. 2 gegebenen Konstruktion erhalten wir nur die reellen Wurzeln der Gl. (4c). Etwa vorhandene imaginäre und komplexe Lösungen bleiben bei einem solchen Verfahren unentdeckt. Da solchen Lösungen häufig eine reale physikalische Bedeutung zukommt, so müssen wir uns auch mit ihnen beschäftigen [1]). Rein imaginäre Werte von λ würden bedeuten, daß

$$e^{-\lambda^2 T}$$

mit $T = \infty$ selbst unendlich wird; die betreffende Teilwelle würde dann nicht abklingen, sondern unbegrenzt anschwellen, was physikalisch sinnlos ist. In der Tat hat die Gleichung (4c) keine rein imaginären Lösungen; denn setzen wir $\lambda l = \sqrt{-1}\,\beta'$, wo also β' jetzt reell ist, so folgt

$$\mathfrak{Tg}\,\beta' = -\frac{R_0}{rl} \cdot \beta'.$$

Diese transzendente Gleichung hat keine einzige reelle von Null verschiedene Lösung, denn $\mathfrak{Tg}\,\beta'$ und β' haben für reelle β' stets das nämliche Vorzeichen, und $\frac{R_0}{rl}$ ist wesentlich positiv.

Etwas schwieriger ist die Frage nach den komplexen Lösungen zu beantworten, die wir nicht von vornherein als physikalisch sinnlos zu erkennen vermögen. Wir setzen

$$\lambda l = \beta = \xi + \sqrt{-1} \cdot \eta \qquad (5a)$$

(ξ und η reell.)

1) Ferner: mathematisch richtige, aber physikalisch unmögliche Lösungen weisen stets darauf hin, daß der mathematische Ansatz die physikalischen Tatsachen unrichtig oder unvollständig wiedergibt.

Dann ist

$$e^{-\lambda^2 T} = e^{-(\xi+\sqrt{-1}\eta)^2 \frac{T}{l^2}} = e^{-(\xi^2-\eta^2)\frac{T}{l^2}} \cdot \left\{\cos 2\xi\eta\frac{T}{l^2} - \sqrt{-1}\sin 2\xi\eta\frac{T}{l^2}\right\} \quad (5b)$$

Nun ersieht man aus der Form der Gl. (4c), daß, wenn eine Lösung von der Form (5a) existiert, die zu dieser Wurzel konjugiert komplexe Größe

$$\lambda l = \xi - \sqrt{-1}\,\eta \quad (5c)$$

ebenfalls eine Lösung ist. In dem Schlußergebnis der Rechnung, nämlich in den Reihen (VIa) und (VIb) werden dementsprechend zwei konjugiert komplexe Glieder auftreten, so daß v und i doch reell werden, wie es sein muß. Ist dann außerdem

$|\xi| > |\eta|$, und somit $\xi^2 - \eta^2$ positiv,

so haben die Wurzeln (5a) und (5b) eine vernünftige physikalische Bedeutung, und die Frage nach der Existenz solcher Wurzeln ist keine überflüssige. Im vorliegenden Falle gibt es indessen solche Wurzeln nicht. Um das zu zeigen, müssen wir die allgemeine Gl. (VIIa) auf unser spezielles Problem anwenden. Infolge der Beziehungen (3a) und (3b) wird die rechte Seite von (VIIa) null, und es gilt daher, solange λ_μ und λ_ν verschiedene Wurzeln sind,

$$\int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu \, dx = 0 \quad (6)$$

$$(\mu \neq \nu).$$

Beziehen wir nun die Indizes μ und ν gerade auf ein paar konjugiert komplexer Wurzeln, so erscheinen φ_μ und φ_ν in der Form

$$\varphi_\mu = U(x) + \sqrt{-1}\,V(x)$$
$$\varphi_\nu = U(x) + \sqrt{-1}\,V(x),$$

wo U und V reelle Funktionen von x bedeuten.

Somit wird nach Gl. (6)

$$\int_0^l (U^2 + V^2)\, dx = 0.$$

Diese Gleichung enthält einen Widerspruch; denn eine Summe von Quadraten kann nicht null sein; daher gibt es keine komplexen Werte von λ. Unsere graphische Konstruktion (Fig. 2) liefert also sämtliche Wurzeln der Gl. (4c). Man entnimmt der Figur ohne weiteres, daß die Wurzeln der Reihe nach im 2., 4., 6., ... Quadranten liegen; allgemein gilt

$$\lambda_\nu l = \frac{2\nu - 1}{2}\cdot\pi + \varepsilon_\nu. \quad (7)$$

ε_ν ist ein Winkel, der kleiner als 90^0 ist und mit zunehmender Ordnungszahl ν sich der Null nähert. In dem von Thomson behandelten Falle eines verschwindend kleinen Batteriewiderstands geht die Gerade $-\frac{R_0}{rl}x$ in die Abszissenachse über; dann ist einfach

$$\lambda_\nu l = \nu\pi. \quad (7a)$$

Auch für geringe R_0 gilt diese Beziehung angenähert, wenigstens für die niedrigen Ordnungszahlen ν; für hohe Ordnungszahlen ist dagegen (nach Gl. 7) angenähert

$$\lambda_\nu l = (2\nu - 1)\frac{\pi}{2}. \quad (7b)$$

Streng würde diese Gleichung gelten, wenn das Geberende des Kabels offen wäre; wir sehen somit, daß der Batteriewiderstand die Wirkung hat, daß das Geberende des Kabels sich den Teilwellen hoher Ordnung gegenüber verhält wie ein offenes Ende.

Wir gehen nun dazu über, die Koeffizienten a_ν der Funktionen φ_ν zu bestimmen. Dazu muß die Anfangsbedingung (2a) herangezogen werden:

$$v = E\frac{rl}{rl+R_0}\left(\frac{x}{l} - 1\right) \text{ für } t = 0.$$

Setzt man diese in die Reihe (VIa) ein, so erhält man

$$E\frac{rl}{rl+R_0}\left(\frac{x}{l} - 1\right) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots.$$

Zur Bestimmung des Koeffizienten a_ν multiplizieren wir diese Gleichung mit $\varphi_\nu\, dx$ und integrieren über die Länge des Kabels $x = 0$ bis $x = l$. Dann fallen wegen (6) alle Glieder bis auf das eine $\int_0^l \varphi_\nu^2 dx$ fort, und es wird mit

$$\varphi_\nu = a_\nu \psi_\nu$$

$$a_\nu = E\frac{rl}{rl+R_0}\cdot\frac{\int_0^l \left(\frac{x}{l} - 1\right)\psi_\nu\, dx}{\int_0^l \psi_\nu^2 dx}, \quad (8a)$$

für ψ_ν ist nach (4a) der Ausdruck zu setzen

$$\psi_\nu = \sin\lambda_\nu x + \frac{\lambda_\nu R_0}{r}\cos\lambda_\nu x.$$

Wir wollen die Abkürzungen einführen

$$\lambda_\nu l = \beta_\nu \quad (9a)$$

$$\frac{R_0}{rl} = \alpha. \quad (9b)$$

Dann ist, wenn wir jetzt den Index ν wieder fortlassen, da es einstweilen noch nicht auf ihn ankommt,

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \alpha\beta\cos\lambda x + \sin\lambda x \\ \psi' &= -\alpha\beta\lambda\sin\lambda x + \lambda\cos\lambda x \\ \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} &= \alpha l\cos\lambda x - \alpha\beta x\sin\lambda x + x\cos\lambda x \\ \frac{\partial\psi'}{\partial\lambda} &= -2\alpha\beta\sin\lambda x - \alpha\beta\lambda x\cos\lambda x + \\ &\quad \cos\lambda x - x\lambda\sin\lambda x. \end{aligned}\right\} \quad (4d)$$

Ferner, nach Gl. (VIIc)

$$\int_0^l \psi^2 dx = \frac{1}{2\lambda}\left[\psi'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \psi\frac{\psi'}{\partial\lambda}\right]_0^l. \quad (4e)$$

Nun kann man die Integrale in (8a) leicht berechnen. Die erhaltenen Ausdrücke vereinfachen sich wesentlich, wenn man die Grenzbedingung (3a) benutzt, die in unserer neuen Schreibweise lautet

$$\alpha\beta\cos\beta+\sin\beta=0 \qquad (3a)$$

oder, was dasselbe

$$(1+\alpha^2\beta^2)\cos^2\beta=1. \qquad (3a')$$

Dann erhält man

$$\int_0^l\left(\frac{x}{l}-1\right)\psi\,dx=-\frac{l(\alpha+1)}{\beta}$$

und

$$\int_0^l\psi^2dx=\frac{l}{2}(1+\alpha+\alpha^2\beta^2).$$

Diese Beziehung erhält man am einfachsten mit Hilfe von (4e); natürlich führt auch die unmittelbare Integration zum gleichen Ziel. Setzt man die gefundenen Ausdrücke für die Integrale in (8a) ein, so folgt

$$a_\nu=-E\frac{rl}{rl+R_0}\cdot\frac{2(\alpha+1)}{\beta(1+\alpha+\alpha^2\beta^2)}. \qquad (8b)$$

Hiermit sind alle Koeffizienten und Parameter in den Reihen (VIa) und (VIb) bestimmt. Der Übersichtlichkeit wegen stellen wir die Ergebnisse jetzt zusammen, nachdem wir zunächst noch folgende Abkürzungen eingeführt haben:

$$\frac{T}{l^2}=\tau=\frac{t}{rCl^2} \qquad (9c)$$

$$y=\frac{x}{l}. \qquad (9d)$$

Außerdem war

$$\alpha=\frac{R_0}{rl} \qquad (9b)$$

und $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_\nu \cdots\cdots$ sind die positiven Wurzeln der transzendenten Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta=-\alpha\beta. \qquad (4c)$$

Hiermit erhält man zunächst für ψ und ψ' nach Gl. (4a) und (4b) die einfachen Formeln

$$\left.\begin{aligned}\psi&=\frac{\sin\beta(y-1)}{\cos\beta}\\ \psi'&=\frac{\beta\cos\beta(y-1)}{l\cos\beta}\end{aligned}\right\} \qquad (9e)$$

Daher wird nach (VIa) und (VIb)

$$v=-E\frac{rl}{rl+R_0}\sum_\nu\frac{2(\alpha+1)e^{-\beta_\nu^2\tau}\sin\beta_\nu(y-1)}{(1+\alpha+\alpha^2\beta_\nu^2)\beta_\nu\cos\beta_\nu} \qquad (9f)$$

$$i=\frac{E}{rl+R_0}\sum_\nu\frac{2(\alpha+1)e^{-\beta_\nu^2\tau}\cos\beta_\nu(y-1)}{(1+\alpha+\alpha^2\beta_\nu^2)\cos\beta_\nu} \qquad (9g)$$

Von besonderem Interesse ist der Verlauf des Stromes am Kabelanfang ($y=0$) und am Kabelende ($y=1$). Für den ersten ergibt sich mit $y=0$ aus (9g) der Ausdruck

$$i_a=\frac{E}{rl+R_0}\sum_\nu\frac{2(\alpha+1)}{1+\alpha+\alpha^2\beta_\nu^2}e^{-\beta_\nu^2\tau}. \qquad (9h)$$

Diese Reihe ist für alle τ (auch für $\tau=$ konvergent; denn für sehr große ν ist, um genauer, je größer ν (nach Gl. 7b)

$$\beta_\nu=(2\nu-1)\frac{\pi}{2}.$$

Daher geht für $\tau=0$ und hohe Ordnungszahlen ν die Reihe in die mit einem Proportionalitätsfaktor multiplizierte Reihe der rez proken Quadrate der ungeraden Zahlen über, die bekanntlich konvergiert.

Für den Strom am Kabelende ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}i_e&=\frac{E}{rl+R_0}\sum_\nu\frac{2(\alpha+1)}{(1+\alpha+\alpha^2\beta_\nu^2)\cos\beta_\nu}e^{-\beta_\nu^2\tau}\\ i_e&=\frac{E}{rl+R_0}\sum_\nu\frac{2(\alpha+1)\sqrt{1+\alpha^2\beta_\nu^2}}{1+\alpha+\alpha^2\beta_\nu^2}e^{-\beta_\nu^2\tau}(-1)^\nu\end{aligned}\right\} \qquad (9i)$$

In diesem Ausdruck ist die Quadratwurzel stets mit dem positiven Vorzeichen zu versehen; das abwechselnde Zeichen von $\cos\beta_\nu$ kommt im Faktor $(-1)^\nu$ zum Ausdruck.

Es ist interessant zu zeigen, daß die entwickelten Formeln für $\alpha=0$ (widerstandslose Batterie) in die schon von Thomson aufgestellten Beziehungen übergehen.

Mit $\alpha=0$ wird (Gl. 4c)

$$\operatorname{tg}\beta=0$$

$$\beta=\nu\pi \quad (\nu=1, 2, 3\cdots)$$

folglich (Gl. 9g)

$$i=\frac{E}{rl}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}2e^{-\nu^2\pi^2\tau}\cos\nu\pi y$$

und

$$i=\frac{E}{rl}\left\{1+2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}e^{-\nu^2\pi^2\tau}\cos\nu\pi y\right\}$$

oder

$$i=\frac{E}{rl}\vartheta(q,\omega),$$

wo $\vartheta(q,\omega)$ die elliptische Thetafunktion[1])

$$\vartheta(q,\omega)=1-2[q\cos2\pi\omega-q^4\cos4\pi\omega+q^9\cos6\pi\omega-\cdots]$$

bedeutet, mit

$$q=e^{-\pi^2\tau},\ 2\omega=1-y.$$

Da die ϑ-Reihe für $q=1$, d. h. $\tau=0$ nicht konvergiert, so ist der von Thomson aufgestellte Ausdruck für den allerersten Moment ($t=0$) nicht brauchbar. Um diesem Übelstand abzuhelfen, kann man aus der ϑ-Reihe eine Reihe für den Endstrom

$$i_e=2\frac{E}{rl}\sqrt{\frac{1}{\pi\tau}}\{u+u^9+u^{25}+\cdots\}$$

$$u=e^{-\frac{1}{4\tau}}$$

1) Tabellen für diese Funktion finden sich auch in der sehr empfehlenswerten Sammlung: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven von Emde und Jahnke (Math.-phys. Schriften, Bd. 5), Leipzig und Berlin 1909 bei Teubner, S. 71.

ableiten[1]), die gerade für kleine τ sehr gut konvergiert. Für $\tau = 0$ ($t = 0$) ergibt sie

$$i_x = 0,$$

wie es auch sein muß. Dagegen wird (nach derselben Transformation) der Strom am Kabelanfange im ersten Moment unendlich. Wie wir gezeigt haben (Gl. 9h), vermeidet man dieses physikalisch unzulässige Ergebnis, wenn man den endlichen Batteriewiderstand berücksichtigt. Man darf indes hieraus nicht schließen, daß man durch genügende Verringerung des Batteriewiderstands den Anfangsstrom beliebig hoch treiben könne. Je geringer nämlich der Batteriewiderstand ist, um so rascher steigt die Spannung am Kabelanfang an; von einer gewissen Schnelligkeit der elektromagnetischen Vorgänge an darf man die Selbstinduktivität L des Kabels nicht mehr vernachlässigen; im Grenzfalle eines verschwindend kleinen Batteriewiderstands verlaufen die Vorgänge am Anfang des Kabels so rasch, daß dort der induktive Spannungsabfall den Ohmschen weit überwiegt; in diesem Falle wird[2])

$$i_a = E\sqrt{\frac{C}{L}}$$

L = Selbstinduktivität der Längeneinheit des Kabels. Diese Formel gilt natürlich nur für die allererste Zeit unmittelbar nach dem Einschalten.

4a. Ein Abschlußkondensator am Empfangsende.

Wir gehen nun einen Schritt weiter und betrachten den Fall, daß das Kabel am fernen Ende auf einen Kondensator geschaltet ist (Fig. 3)[3]). Hier ist in dem sich schließlich einstellenden stationären Zustande

$$\left.\begin{aligned} i_x &= 0 \\ v_x &= E \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Im Augenblicke des Einschaltens ist das Kabel noch ungeladen, man hat somit die Anfangsbedingung $v = 0$ für $t = 0$ oder (Gl. IV)

$$v = -E \text{ für } t = 0. \quad (11a)$$

Die Grenzbedingung am Geberende ist dieselbe, wie in dem vorher behandelten Falle, nämlich

$$v = -R_0 i \text{ für } x = 0, \text{ alle } t. \quad (11b)$$

Am Empfangsende ist

$$i = K\frac{dv}{dt}$$

oder, da $i_x = 0$ und v_x konstant ist,

$$i = K\frac{dv}{dt} \text{ für } x = l, \text{ alle } t. \quad (11c)$$

Wenn wir die Lösung wieder in der Form einer Reihe (Gl. VIa und VIb)

$$v = \Sigma e^{-\lambda^2 T}\varphi'(x)$$

$$i = -\frac{1}{r}\Sigma e^{-\lambda^2 T}\varphi'(x)$$

ansetzen, so ergibt (11b) die Bedingung

$$\varphi(0) = \frac{R_0}{r}\varphi'(0). \quad (12a)$$

Die Grenzbedingung (11c) verlangt

$$\left(\text{da } \frac{d}{dt} = \frac{1}{Cr}\frac{d}{dT} \text{ ist}\right)$$

$$\varphi'(l) = \lambda^2\frac{K}{C}\varphi(l). \quad (12b)$$

Die beiden letzten Gleichungen müssen uns wieder zur Bestimmung der speziellen Form der Normalfunktionen φ (bis auf einen noch willkürlichen Faktor) und insbesondere zur Aufstellung der transzendenten Gleichung für λ dienen. Der allgemeine Ansatz für φ ist

$$\varphi = a\sin\lambda x + b\cos\lambda x.$$

Durch Einsetzen in (12a) erhält man

$$b = a\frac{\lambda R_0}{r}.$$

Es ist also

$$\varphi = a\psi = a\left(\sin\lambda x + \frac{\lambda R_0}{r}\cos\lambda x\right) \quad (13a)$$

$$\varphi' = a\psi' = a\left(\lambda\cos\lambda x - \frac{\lambda^2 R_0}{r}\sin\lambda x\right). \quad (13b)$$

Die Form der Normalfunktionen ist dieselbe, wie in dem früher betrachteten Falle; dagegen kommen ganz andere Werte von λ in Frage. Setzt man die Ausdrücke (13a) und (13b) mit $x = l$ in Gl. (12b) ein, so erhält man

$$\lambda\cos\lambda l - \frac{\lambda^2 R_0}{r}\sin\lambda l = \frac{\lambda^2 K}{C}\left(\sin\lambda l + \frac{\lambda R_0}{r}\cos\lambda l\right).$$

Wir benutzen jetzt wieder einige Abkürzungen, die zum Teil schon in 3. verwendet worden sind, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{R_0}{rl} \\ \delta &= \frac{K}{Cl} \\ \beta &= \lambda l \end{aligned}\right\} \quad (13c)$$

Mit diesen vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1-\beta^2\alpha\delta}{\beta(\alpha+\delta)}. \quad (13d)$$

Das ist die gesuchte transzendente Glei-

1) Mit Hilfe der Transformationstheorie der ϑ-Funktionen oder auf einem Umwege wie bei Riemann-Weber, partielle Differentialgleichungen, II, § 48, S. 116.

2) K. W. Wagner, a. angegebenen Ort, Abschnitt 3 und Fig. 3.

3) Abschlußkondensatoren haben einen doppelten Zweck: sie sollen erstens verhindern, daß Erdströme in das Kabel eindringen; sie bewirken ferner, daß der Strom am fernen Ende rascher auf seinen Höchstwert ansteigt und ermöglichen so eine größere Telegraphiergeschwindigkeit.

chung für $\beta = \lambda l$, die wir nun zu diskutieren haben.

a) Da ein sehr großer Kondensator K in physikalischer Hinsicht einem Kurzschluß des Endes gleichkommt, so muß (13d) im Grenzfall $\delta = \infty$ in die für das vorige Beispiel aufgestellte transzendente Gleichung (4c) übergehen. In der Tat ergibt (13d) für $\lim \delta = \infty$

$$\operatorname{tg} \beta = -\alpha\beta.$$

b) Praktisch liegen die Verhältnisse immer so, daß α eine sehr kleine Zahl ist. Denkt man außerdem daran, daß gerade auf den hier vorzugsweise interessierenden Empfangsstrom ($x = l$) ein kleiner Wert von α bei der großen Kabellänge nur einen verschwindenden Einfluß haben kann, so wird man im allgemeinen in (13d) $\alpha = 0$ setzen dürfen und erhält

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\delta\beta} \qquad (13e)$$

Will man den Verlauf des Anfangsstromes ($x = 0$) studieren, so darf man allerdings diese letzte Vereinfachung nicht treffen; denn dieser Strom würde im Augenblick des Einschaltens bei verschwindendem Batteriewiderstand ($\alpha = 0$) unendlich groß. Wir interessieren uns in erster Linie für den Verlauf des Endstroms ($x = l$) und werden darum hauptsächlich die wesentlich einfachere Gleichung (13e) zugrunde legen.

c) Die reellen Lösungen von (13d) kann man wieder graphisch finden, indem man die Schar der Tangenskurven zum Schnitt bringt mit der Hyperbel $\frac{1-\beta^2\alpha\delta}{\beta(\alpha+\delta)}$ (Fig. 4).

Zu Asymptoten hat sie die Ordinatenachse ($\beta = 0$) und die Gerade $-\beta\frac{\alpha\delta}{\alpha+\delta}$; für verschwindendes α (der Gl. 13e entsprechend) geht diese Gerade in die Abszissenachse über; die Hyperbel wird zu einer gleichseitigen. Zu jeder positiven Wurzel gehört auch hier eine gleichgroße negative, die aber keiner wesentlich neuen Normalfunktion entspricht und darum außer Betracht bleiben kann.

d) Es gibt keine rein imaginären Lösungen von (13d). Setzt man nämlich

$$\beta = \sqrt{-1}\,\beta'$$

so ergibt sich

$$\operatorname{Tg} \beta' = -\frac{1+\beta'^2\alpha\delta}{\beta'(\alpha+\delta)}.$$

Diese Gleichung ist in reellen Zahlen nicht lösbar, denn beide Seiten haben für jedes reelle β' entgegengesetzte Vorzeichen.

e) Es gibt auch keine komplexen Lösungen von (13d). Um das zu zeigen, bilden wir nach (VIIa) das über die Kabellänge genommene Integral des Produkts zweier Normalfunktionen:

$$(\lambda_\mu^2 - \lambda_\nu^2)\int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu\, dx = [\varphi_\mu \varphi_\nu' - \varphi_\nu \varphi_\mu']_0^l.$$

Dies ergibt, wegen (12a) und (12b)

$$\int_0^l \varphi_\mu \varphi_\nu\, dx = -\frac{K}{C}\varphi_\mu(l)\,\varphi_\nu(l) \qquad (14a)$$

(gültig für $\mu \neq \nu$.)

Nun weiß man, daß komplexe Wurzeln von (13d) konjugiert auftreten müssen (reelle Koeffizienten!). Ein solches Paar sei

$$\beta_\mu = \xi + \eta\sqrt{-1}$$
$$\beta_\nu = \xi - \eta\sqrt{-1}$$

und die zugehörigen Normalfunktionen

$$\varphi_\mu = U(x) + \sqrt{-1}\,V(x)$$
$$\varphi_\nu = U(x) - \sqrt{-1}\,V(x).$$

Darin sind U und V reelle Funktionen ihres Arguments. Wendet man (14a) auf dieses Wurzelpaar an, so folgt

$$\int_0^l (U^2 + V^2)dx = -\frac{K}{C}[U^2(l) + V^2(l)].$$

Diese Gleichung ist unmöglich, denn links steht eine wesentlich positive, rechts eine wesentlich negative Größe.

f) Bezüglich der Lage der Wurzeln β entnehmen wir der Figur 4 das Folgende. Hat α einen endlichen Wert, so ist, um so genauer, je höher die Ordnungszahl ν ist,

$$\beta_\nu = (2\nu - 3)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_\nu \qquad (13f)$$

ε_ν ist ein kleiner positiver Winkel.

Ist dagegen $\alpha = 0$, so gilt

$$\beta_\nu = (\nu - 1)\pi + \varepsilon_\nu. \qquad (13g)$$

Wir wollen die allgemeine Formel zur Berechnung des Koeffizienten a_ν der Normalfunktionen entwickeln. In dem hier vorliegenden einfachen Falle ist als Anfangsbedingung

$$v = -E \text{ für } t = 0$$

vorgeschrieben (Gl. 11a). Wir lösen zunächst den allgemeineren Fall

$$v = \Phi(x) \text{ für } t = 0, \qquad (11a')$$

wo $\Phi(x)$ eine willkürliche Funktion von x bedeutet. Mit dieser Bedingung geht die Reihe (VIa) für v über in

$$\Phi(x) = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\nu + \cdots$$

oder

$$\Phi(x) = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_\nu\psi_\nu + \cdots \qquad (14b)$$

Wir multiplizieren mit $\psi_\nu\, dx$ und integrieren über die Kabellänge

$$\int_0^l \Phi(x)\,\psi_\nu\, dx = \int_0^l a_1\psi_1\psi_\nu dx + \cdots + \int_0^l a_\nu\psi_\nu^2\, dx + \cdots.$$

Nun ist nach (14a) für $\mu \neq \nu$

$$\int_0^l a_\mu\psi_\mu\psi_\nu dx = -\frac{K}{C}a_\mu\psi_\mu(l)\,\psi_\nu(l),$$

folglich

$$\int_0^l \Phi(x)\psi_\nu dx = -\frac{K}{C}\psi_\nu(l)\sum a_\mu\psi_\mu(l) + \int_0^l a_\nu\psi_\nu^2 dx.$$

Dabei durchläuft in der rechtsstehenden Summe μ die Werte von 1 bis ∞, läßt jedoch den Wert $\mu=\nu$ aus. Will man diesen Wert nicht bei der Summation auslassen, so hat man das Glied

$$+\frac{K}{C}a_\nu\psi_\nu^2(l)$$

noch rechts hinzuzufügen. Tut man dies, so kann man die vollständige Summe nach (14b) ersetzen durch $\Phi(l)$. Dann ist also

$$\int_0^l \Phi(x)\psi_\nu dx = -\frac{K}{C}\Phi(l)\psi_\nu(l) + \frac{K}{C}a_\nu\psi_\nu^2(l) + \int_0^l a_\nu\psi_\nu^2 dx$$

oder

$$a_\nu = \frac{\int_0^l \Phi(x)\psi_\nu dx + \frac{K}{C}\Phi(l)\psi_\nu(l)}{\int_0^l \psi_\nu^2 dx + \frac{K}{C}\psi_\nu^2(l)}. \quad (14c)$$

Wir wollen jetzt die entwickelten allgemeinen Beziehungen auf den vorliegenden Fall anwenden, wobei auch der Batteriewiderstand vernachlässigt werden soll ($\alpha=0$). Dann ist

$$\Phi(x)=\Phi(l)=-E.$$

Ferner (Gl. 13a)

$$\psi = \sin\lambda x = \sin\beta\frac{x}{l} = \sin\beta y$$

$$\psi' = \lambda\cos\lambda x = \frac{\beta}{l}\cos\beta\frac{x}{l} = \frac{\beta}{l}\cos\beta y$$

$$\psi(l) = \sin\beta$$

$$\int_0^l \psi^2 dx = \frac{l}{2}\left(1-\frac{\sin 2\beta}{2\beta}\right) = \frac{l}{2}(1-\delta\sin^2\beta).$$

Daher wird

$$a_\nu = E\frac{\frac{l}{\beta_\nu}(\cos\beta_\nu - 1) - \delta l\sin\beta_\nu}{\frac{l}{2}(1-\delta\sin^2\beta_\nu) + \delta l\sin^2\beta_\nu}$$

$$a_\nu = -\frac{2E}{\beta_\nu(1+\delta\sin^2\beta)} = -\frac{2E}{\beta_\nu+\frac{1}{2}\sin 2\beta_\nu} \quad (14d)$$

Folglich erhält man für v und i die Gleichungen

$$v = -2E\sum_\beta \frac{e^{-\beta^2\tau}\sin\beta y}{\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta} \quad (15a)$$

$$i = \frac{2E}{rl}\sum_\beta \frac{\beta e^{-\beta^2\tau}\cos\beta y}{\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta}. \quad (15b)$$

Darin bedeuten die β die positiven Lösungen von (13e) während y und τ wie früher durch (9d) und (9c) gegeben sind. Für den Strom am Empfangsende ($x=l$, $y=1$) erhält man

$$i_e = \frac{2E}{rl}\sum_\beta \frac{\beta\cos\beta}{\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta} e^{-\beta^2\tau}. \quad (15c)$$

Mit unbegrenzt wachsender Kapazität K gehen alle Formeln wieder in die Thomsonschen über; mit $\delta=\infty$ muß nämlich $\operatorname{tg}\beta=0$, das heißt

$$\beta = n\pi \quad (n=1, 2, \cdots)$$

sein.

4b. Ein Abschlußkondensator auf der Geberseite vorhanden.

Es sollen nun die Vorgänge in einem Kabel betrachtet werden, das am fernen Ende kurzgeschlossen, auf der Geberseite mit einem Abschlußkondensator K versehen ist; der Batteriewiderstand R_0 wird auch berücksichtigt (Fig. 5). Im Augenblick $t=0$ wird in das bis dahin unelektrische Kabel durch einfaches Schließen der Gebetaste ein Stromstoß geschickt.

Zu Anfang, $t=0$, ist also auf dem ganzen Kabel

$$\left.\begin{aligned} v &= 0 \\ i &= 0 \end{aligned}\right\}. \quad (16a)$$

Zugleich ist die Spannung am Kondensator

$$v_K = 0 \text{ für } t=0. \quad (16b)$$

Im stationären Zustand ist

$$\left.\begin{aligned} v_s &= 0 \\ i_s &= 0 \\ v_{K_s} &= E \end{aligned}\right\}. \quad (16c)$$

Für den Kabelanfang ergibt sich als Grenzbedingung, wenn die Spannungen und der Strom in den in Fig. 5 angegebenen Richtungen als positiv gezählt werden

$$v_K + E = R_0 i + v$$

oder, da v_s und i_s beide null sind,

$$v_K + E = R_0 i + v \text{ für } x=0. \quad (17a)$$

Die Grenzbedingung für das kurzgeschlossene Kabelende ist einfach

$$v=0 \text{ für } x=l. \quad (17b)$$

Zu der Anfangsbedingung (16a) ist zu bemerken, daß sie nicht für das Geberende ($x=0$) gilt. Wohl ist dort $v=0$ und somit auch $v=0$; dagegen muß auch im ersten Moment ($t=0$) die Grenzbedingung (17a) gelten, und daher ist

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{E}{R_0} \text{ für } t=0 \text{ und } x=0 \\ i &= 0 \text{ für } t=0 \text{ und } x>0. \end{aligned}\right\} \quad (16d)$$

Die Anfangsverteilung des Stroms hat also bei $x = 0$ eine Unstetigkeit (endlicher Sprung).

Wie in den früher betrachteten Beispielen versuchen wir auch hier, v und i durch Reihenentwicklungen darzustellen

$$v = \Sigma e^{-\lambda^2 T} \varphi(x) \qquad \text{(VIa)}$$

$$i = -\frac{1}{r} \Sigma e^{-\lambda^2 T} \varphi'(x) \qquad \text{(VIb)}$$

mit

$$\varphi = a \sin \lambda x + b \cos \lambda x \qquad \text{(Vb)}$$

$$\varphi' = a \lambda \cos \lambda x - b \lambda \sin \lambda x. \qquad \text{(Vc)}$$

Um die Grenzbedingung (17a) anwenden zu können, differenzieren wir sie nach der Zeit und bedenken, daß

$$\frac{dv_K}{dt} = -\frac{i}{K}$$

ist. Dann ergibt sich

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{i}{K} - R_0 \frac{di}{dt} \text{ für } x = 0. \qquad \text{(17c)}$$

Hieraus folgt mit Hilfe von (VIa) und (VIb)

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\lambda^2}{Cr}\varphi(0) &= \left(\frac{1}{Kr} - \frac{R_0}{r}\cdot\frac{\lambda^2}{Cr}\right)\varphi'(0) \\ -\lambda^2\varphi(0) &= \left(\frac{C}{K} - \frac{R_0}{r}\lambda^2\right)\varphi'(0). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(18a)}$$

Setzt man in diese Beziehung für φ und φ' ihre Werte (Gl. Vb und Vc) ein, so erhält man

$$b = a\left(\frac{R_0}{r}\lambda - \frac{C}{K\lambda}\right) = \frac{a}{\lambda}\left(\frac{R_0}{r}\lambda^2 - \frac{C}{K}\right).$$

Wir führen nun diesen Wert von b in (Vb) und (Vc) ein und schreiben dann an Stelle von $\frac{a}{\lambda}$ den einfachen Buchstaben a

$$\varphi = a\left[\lambda \sin \lambda x + \left(\frac{R_0}{r}\lambda^2 - \frac{C}{K}\right)\cos \lambda x\right]$$

$$\varphi' = a\left[\lambda^2 \cos \lambda x - \left(\frac{R_0}{r}\lambda^3 - \frac{C}{K}\lambda\right)\sin \lambda x\right].$$

Wir benutzen wieder die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{R_0}{rl} &= \alpha \\ \lambda l &= \beta \\ \frac{K}{Cl} &= \delta. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(13c)}$$

Mit ihnen erhält man

$$\varphi = a\psi = a\left[\frac{\beta}{l}\sin \lambda x + \left(\frac{\alpha\beta^2}{l} - \frac{1}{\delta l}\right)\cos \lambda x\right] \qquad \text{(19a)}$$

$$\varphi' = a\psi' = a\left[\frac{\beta^2}{l^2}\cos \lambda x - \left(\frac{\alpha\beta^3}{l^2} - \frac{\beta}{\delta l^2}\right)\sin \lambda x\right]. \qquad \text{(19b)}$$

Wir schreiten jetzt zur Aufstellung der zur Bestimmung der „Eigenwerte" β dienenden transzendenten Gleichung; dazu verhilft uns die Grenzbedingung (17b), nach der

$$\varphi(l) = 0 \qquad \text{(18b)}$$

sein muß. Dies ergibt unter Benutzung des Ausdrucks (19a) für φ die Gleichung

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1 - \alpha\delta\beta^2}{\beta\delta}. \qquad \text{(19c)}$$

Sie ist ganz analog der im vorigen Beispiel erhaltenen Gleichung (13d) gebaut. Die rechte Seite stellt eine ungleichseitige Hyperbel dar mit der Ordinatenachse ($\beta = 0$) und der durch den Nullpunkt gehenden Geraden $-\alpha\beta$ als Asymptoten. Die Konstruktion der reellen Wurzeln geschieht auch hier nach Fig. 4; es genügt wiederum, nur die positiven in den Kreis der Betrachtung zu ziehen. Auch der Nachweis, daß imaginäre und komplexe Wurzeln nicht vorkommen, kann ganz wie in Abschnitt 4a geführt werden und sei darum jetzt übergangen.

Es bleibt uns noch die Bestimmung der Koeffizienten a in den Reihenentwicklungen für v und i (VIa und VIb). Dazu muß der Anfangszustand herangezogen werden. Diesmal ist uns — im Gegensatz zu den vorher betrachteten Fällen — nicht die Anfangsverteilung von v, sondern die von i gegeben (Gl. 16d). Wir haben uns daher an die Reihe für i (VIb) zu halten, in der die ersten Ableitungen φ' der Normalfunktionen φ vorkommen. Das Verfahren entspricht im übrigen ganz dem im vorhergehenden Falle (4a) angewandten. Wir bedürfen also vor allem der Kenntnis der Integrale

$$\int_0^l \varphi_\nu' \varphi_\mu' dx.$$

Für diese gilt nach (VIIb)

$$(\lambda_\mu^2 - \lambda_\nu^2)\int_0^l \varphi_\mu' \varphi_\nu' dx = [\lambda_\mu^2 \varphi_\mu \varphi_\nu' - \lambda_\nu^2 \varphi_\nu \varphi_\mu']_0^l. \qquad \text{(VIIb)}$$

Nun fallen rechts die der oberen Grenze ($x = l$) entsprechenden Glieder wegen (18b) heraus. An der unteren Grenze ($x = 0$) drücken wir die Terme $\lambda^2\varphi$ mit Hilfe von (18a) durch die φ' aus. Dann erhalten wir

$$\int_0^l \varphi_\mu' \varphi_\nu' dx = -\frac{R_0}{r}\varphi_\mu'(0)\varphi_\nu'(0) \qquad \text{(20)}$$

(gültig für $\mu \neq \nu$).

Nach (VIb) ist für $t = 0$

$$\begin{aligned} -ri(x) &= \varphi_1' + \varphi_2' + \cdots + \varphi_\nu' + \cdots \\ &= a_1\psi_1' + a_2\psi_2' + \cdots + a_\nu\psi_\nu' + \cdots \end{aligned} \qquad \text{(21a)}$$

Unter $i(x)$ ist die vorgeschriebene Anfangsverteilung des Stroms zu verstehen, die im allgemeinen irgend eine Funktion von x sein kann; in dem hier zu betrachtenden Falle bedeutet $i(x)$ die durch (16d) gegebene Stromverteilung. Wir multiplizieren zur Berechnung von a_ν die Gl. (21a) mit $\psi_\nu' dx$ und integrieren über die Kabellänge

$$-r\int_0^l i(x)\psi_\nu' dx = a_1\int_0^l \psi_1'\psi_\nu' dx + \cdots + a_\nu\int_0^l \psi_\nu'^2 dx + \cdots.$$

Hieraus folgt mit (20)

$$-r\int_0^l i(x)\psi_\nu' dx = -\frac{R_0}{r}\psi_\nu'(0)\sum_{\mu+\nu} a_\mu \psi_\mu'(0) + a_\nu \int_0^l \psi_\nu'^2\, dx$$

$$= -\frac{R_0}{r}\psi_\nu'(0)\sum_{\text{alle }\mu} a_\mu \psi_\mu'(0) + \frac{R_0}{r} a_\nu \psi_\nu'^2(0) + a_\nu \int_0^l \psi_\nu'^2 dx.$$

Nun bedeutet nach (21a) der Ausdruck $\sum_{\text{alle }\mu} a_\mu \psi_\mu'(0)$ nichts anderes als den Wert, den $-ri(x)$ an der Grenze $x=0$ annimmt, nämlich $-ri(0)$. Hiermit erhält man aus der letzten Gleichung

$$a_\nu = \frac{-r\int_0^l i(x)\psi_\nu' dx - R_0 i(0)\psi_\nu'(0)}{\int_0^l \psi_\nu'^2 dx + \frac{R_0}{r}\psi_\nu'^2(0)}. \qquad (21b)$$

Wenn wir die durch (16d) gegebene Verteilung $i(x)$ einsetzen, so ersehen wir, daß das im Zähler der rechten Seite stehende Integral verschwindet; dagegen ist $R_0 i(0) = E$; daher ist

$$a_\nu = -\frac{E\psi_\nu'(0)}{\int_0^l \psi_\nu'^2 dx + \alpha l \psi_\nu'^2(0)}. \qquad (21c)$$

Die Berechnung des im Nenner stehenden Integrals geschieht am einfachsten mit Hilfe der Formel (VIId). Der Ausdruck für a_ν läßt sich dann mit Hilfe von (19c) noch wesentlich vereinfachen. Das Ergebnis der nicht schwierigen, aber etwas umständlichen Rechnung ist

$$a = -\frac{2E}{\frac{\beta}{l}\left[\operatorname{tg}\beta + \frac{\beta}{\cos^2\beta} + 2\alpha\beta\right]}. \qquad (21d)$$

Mit Rücksicht auf (19c) läßt sich auch ψ (Gl. 19a) noch etwas einfacher schreiben

$$\psi = \frac{\beta}{l}\left(\sin\lambda x - \operatorname{tg}\beta\cos\lambda x\right)$$

$$\psi = \frac{\beta}{l}\frac{1}{\cos\beta}\sin(\lambda x - \beta) = \frac{\beta}{l}\cdot\frac{\sin\beta(y-1)}{\cos\beta} \qquad (22a)$$

$$\psi' = \frac{\beta^2}{l^2}\frac{\cos\beta(y-1)}{\cos\beta} \qquad (22b)$$

mit $y = \frac{x}{l}$. Mit diesen Ausdrücken ergeben sich für v und i die Reihen

$$v = -2E\sum_\beta \frac{e^{-\beta\tau}\sin\beta(y-1)}{\sin\beta + \frac{\beta}{\cos\beta} + 2\alpha\beta\cos\beta} \qquad (23a)$$

$$i = \frac{2E}{rl}\sum_\beta \frac{\beta e^{-\beta\tau}\cos\beta(y-1)}{\sin\beta + \frac{\beta}{\cos\beta} + 2\alpha\beta\cos\beta}. \qquad (23b)$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Formeln mit $\delta = \infty$ (unendlich große Abschlußkapazität) sich in die Formeln (9f) und (9g) zurück verwandeln, die wir für den Fall des unmittelbaren Anschlusses des Kabels an die Gebebatterie entwickelt haben[1]).

Aus (23b) erhält man die Formel für den am fernen Ende ankommenden Strom ($y=1$):

$$i_e = \frac{2E}{rl}\sum_\beta \frac{\beta}{\sin\beta + \frac{\beta}{\cos\beta} + 2\alpha\beta\cos\beta} e^{-\beta\tau}. \qquad (23c)$$

Die Konvergenz dieser Reihenausdrücke erkennt man am einfachsten, wenn man das Verhalten der Koeffizienten für hohe Ordnungszahl ν betrachtet. Dann ist (Gl. 13f)

$$\beta_\nu = (2\nu-3)\frac{\pi}{2} + \varepsilon_\nu$$

$$\sin\beta_\nu = (-1)^\nu$$

$$\cos\beta_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\alpha\beta} \quad \text{(nach Gl. 19c)}.$$

Für $\tau > 0$ konvergieren die Reihen unbedingt. Dasselbe gilt für die v-Reihe auch für $\tau = 0$, denn die Koeffizienten nähern sich für hohe Ordnungszahl unbegrenzt den reziproken Quadraten der ungeraden Zahlen. Die Konvergenz der i-Reihe ist für $\tau = 0$ jedoch nur eine bedingte; die Koeffizienten sind bei genügend hoher Ordnungszahl die reziproken ungeraden Zahlen mit abwechselndem Vorzeichen. Das gilt alles nur, wenn $\alpha > 0$ ist. Mit $\alpha = 0$ konvergiert die i-Reihe überhaupt nur für $\tau > 0$.

4c. Doppelseitiger Abschluß durch Kondensatoren.

Der in der praktischen Kabeltelegraphie meist vorkommende Fall ist der, daß das Kabel an jedem Ende durch einen Kondensator abgeschlossen ist, wodurch eine besonders wirksame Versteilerung der Zeichen erreicht wird.

Das Problem, Strom und Spannung für jeden Punkt des Kabels und zu jeder Zeit zu berechnen, wenn durch einfaches Schließen der Batterietaste ein Zeichen gegeben wird, führt auf keine andern Schwierigkeiten als die, die wir bereits in den vorhergehenden Betrachtungen überwunden haben; es soll darum hier nur das Ergebnis der Rechnung mitgeteilt werden.

Der Batteriewiderstand ist vernachlässigt worden. An jedem Ende sei ein Abschlußkondensator von der Kapazität K verwendet. Das Verhältnis dieser Kapazität zur gesamten Kabelkapazität sei δ:

$$\delta = \frac{K}{Cl}.$$

Die stationäre Spannung ist

$$v_\infty = E\frac{K}{2K + Cl} = E\frac{\delta}{1+2\delta}$$

1) Zur Ausführung dieser Verifikation bediene man sich der Beziehung (3a').

ferner

$$i_2 = 0.$$

Die „Eigenwerte" β sind aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\beta\delta}{\beta^2\delta^2 - 1} \qquad (a)$$

zu berechnen. Diese Gleichung hat nur reelle Wurzeln; man kann sich über die Lage sämtlicher Wurzeln einen schnellen Überblick verschaffen, wenn man die Schar der Tangenskurven mit der Kurve dritten Grades

$$f(\beta) = \frac{2\beta\delta}{\beta^2\delta^2 - 1}$$

zum Schnitt bringt. Diese hat drei Asymptoten, nämlich die Abszissenachse und die beiden zur Ordinatenachse parallelen Geraden $\beta\delta = +1$ (Fig. 6) $f(\beta)$ ist ebenso wie $\operatorname{tg}\beta$ eine ungerade Funktion, so daß die Wurzeln von Gl. (a) nur paarweise mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommen; wiederum sind nur die positiven zu berücksichtigen. Mit

$$y = \frac{x}{l}$$

erscheinen die Normalfunktionen in der Form

$$\varphi = b(\cos\beta y - \beta\delta \sin\beta y).$$

Darin ist

$$b = \frac{2E\delta}{1 + 2\delta + \beta^2\delta^2}.$$

Für v und i erhält man demgemäß die folgenden Reihen

$$v = E\sum_{\beta} \frac{2\delta e^{-\beta^2\tau}(\cos\beta y - \beta\delta\sin\beta y)}{1 + 2\delta + \beta^2\delta^2}$$

$$i = \frac{E}{rl}\sum_{\beta} \frac{2\beta\delta e^{-\beta^2\tau}(\sin\beta y + \beta\delta\cos\beta y)}{1 + 2\delta + \beta^2\delta^2}.$$

Der Strom am fernen Ende ($y=1$) ergibt sich hieraus zu

$$i_e = i_{e=} \frac{E}{rl}\sum_{\beta} \frac{2\beta\delta e^{-\beta^2\tau}(\sin\beta + \beta\delta\cos\beta)}{1 + 2\delta + \beta^2\delta^2},$$

was man mit

$$\mathcal{J} = \frac{E}{rl}$$

und nach einer kleinen Umrechnung (Benutzung von (a)) auch schreiben kann

$$\bar{i}_e = \mathcal{J}\sum_{\beta} \beta\delta\sin\beta \frac{1 + \beta^2\delta^2}{1 + 2\delta + \beta^2\delta^2} e^{-\beta^2\tau}. \qquad (b)$$

5. Näherungsformeln für den Fall, daß die Abschlußkapazität klein ist gegenüber der Kabelkapazität.

Vernachlässigt man den Batteriewiderstand ($\alpha = 0$), so erhält man bei einseitigem Abschlusse für den Endstrom i_e unter sonst gleichen Umständen denselben Verlauf, einerlei, ob sich der Abschlußkondensator am Anfang oder am Ende des Kabels befindet. Es wird nämlich in beiden Fällen (vergl. Gl. 15c und 23c)

$$\bar{i}_e = i_{e=} \frac{2E}{rl}\cdot\sum_{\beta} \frac{\beta\cos\beta}{\beta + \frac{1}{2}\sin 2\beta} e^{-\beta^2\tau}.$$

Die β sind die Wurzeln der Gleichung (nach 13d und 19c)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\beta\delta}.$$

Ist das Verhältnis δ der Abschlußkapazität zur Kabelkapazität klein, so sind die Wurzeln dieser Gleichung angenähert

$$\frac{\pi}{2},\quad 3\frac{\pi}{2},\quad 5\frac{\pi}{2},\quad \cdots (2k+1)\frac{\pi}{2},\quad \cdots$$

Dann ist

$$\sin 2\beta = 0$$

und

$$\cos\beta = \frac{\sin\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \beta\delta(-1)^{k+1}.$$

Bezeichnen wir noch E/rl mit $\mathcal{J}$, so wird hiernach

$$\bar{i}_e = \mathcal{J}\cdot 2\delta\sum_{k=1,2,\ldots}(2k+1)\frac{\pi}{2}(-1)^{k+1}e^{-\beta^2\tau}$$

oder

$$\bar{i}_e = \mathcal{J}\delta\pi(p - 3p^9 + 5p^{25} - 7p^{49} + \cdots), \qquad (23d)$$

wo

$$p = e^{-\frac{\pi^2\tau}{4}} \qquad (23f)$$

ist. Diese Formel ermöglicht eine verhältnismäßig einfache Berechnung des Endstroms; sie ist aber nur dann genau genug, wenn δ ziemlich klein ist. Da die Zeit nur in p vorkommt, und da p nicht von δ abhängt, so folgt, daß bei kleinerer Abschlußkapazität die Größe dieser Kapazität nicht die Form, sondern nur die Intensität der ankommenden Stromwelle beeinflußt.

Ganz entsprechendes gilt bei doppelseitigem Abschluß. Ist hier δ klein, so sind die Wurzeln von Gl. (a) in § 4c angenähert,

$$\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots k\pi,\ \cdots.$$

$\sin\beta$ in Gl. (b) kann ersetzt werden durch

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\beta\cdot\cos\beta = 2\beta\delta(-1)^{k+1},$$

während

$$\frac{1 + \beta^2\delta^2}{1 + 2\delta + \beta^2\delta^2}$$

für kleine δ durch 1 ersetzt werden darf. Hiermit ergibt sich aus Gl. (b)

$$\bar{i}_e = 2\pi^2\delta^2\mathcal{J}(q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots), \qquad (23g)$$

$$q = e^{-\pi^2\tau}. \qquad (23h)$$

Die Formeln (23e) bis (23h) sind bereits von Devaux-Charbonnel[1]) durch gewisse Näherungsbetrachtungen abgeleitet worden; natürlich ist man erst durch die Kenntnis der exakten Formeln in die Lage gesetzt, überschlagen zu

1) Devaux-Charbonnel, L'Eclairage électrique **31**, 124, 171, 1902.

können, ob ihre Genauigkeit in einem gegebenen Falle ausreicht.

6. Induktionsspule am Empfängerende.

Eine auch im Betrieb langer Telegraphenkabel gelegentlich verwendete Anordnung entspricht der Figur 7[1]). Bei ihr benutzt man zum Betrieb des Empfangsapparats die an den Enden der Spule auftretende Spannung. R_0 soll wie früher den Widerstand der Sendebatterie bedeuten, L_0 die Selbstinduktivität der Spule. Es sei auch hier ein einfacher Stromstoß betrachtet, wie er durch Schließen der Gebetaste im Augenblick $t=0$ hervorgerufen wird. Nachdem der veränderliche Zustand abgelaufen ist, herrscht ein stationärer Zustand, der durch die Gleichungen gegeben ist

$$i_s = \frac{E}{R_0 + rl} \tag{24a}$$

$$v_s = E\,\frac{rl}{rl+R_0}\left(1-\frac{x}{l}\right). \tag{24b}$$

Er ist genau derselbe, wie bei dem im 3. betrachteten Falle ($L_0=0$). Man hat auch dieselbe Anfangsbedingung:

$$v = 0 \text{ für } t=0.$$

Das heißt:

$$v = E\,\frac{rl}{rl+R_0}\left(\frac{x}{l}-1\right) \text{ für } t=0. \tag{24c}$$

Ebenso bleibt die Grenzbedingung für den Kabelanfang

$$v = -R_0 i \text{ für } x=0 \tag{25a}$$

ungeändert; daraus folgt wieder wegen (VIa und VIb)

$$\varphi(0) = \frac{R_0}{r}\,\varphi'(0). \tag{25b}$$

Schließlich ergibt sich wegen dieser Bedingungsgleichung auch für φ aus dem allgemeinen Ansatz (Vb) der schon in dem früheren Beispiel erhaltene Ausdruck (4a)

$$\varphi = a\psi = a\left[\sin\lambda x + \frac{\lambda R_0}{r}\cos\lambda x\right] \tag{26a}$$

$$\varphi' = a\psi' = a\left[\lambda\cos\lambda x - \frac{\lambda^2 R_0}{r}\sin\lambda x\right]. \tag{26b}$$

Indes ist diese Gleichheit der Ausdrücke für die Normalfunktionen mehr eine formelle. Wir werden für die λ ganz andere Werte einzusetzen haben; mit anderen Worten, Grundwelle und Oberwellen haben ganz andere Wellenlängen. Die transzendente Gleichung zu ihrer Berechnung ergibt sich erst durch die Berücksichtigung der Grenzbedingung am fernen Ende. Dort ist

$$v = L_0\,\frac{di}{dt} \text{ für } x=l,$$

oder, weil für $x=l$ $v_s=0$ ist und i_s nicht von t abhängt,

$$v = L_0\,\frac{di}{dt} \text{ für } x=l. \tag{25c}$$

Wir nehmen für v und i den Ansatz (VIa) und (VIb) und erhalten hiermit aus (25c)

$$\varphi(l) = \frac{L_0\lambda^2}{r^2 C}\,\varphi'(l). \tag{25d}$$

In diese Gleichung setzen wir für φ und φ' ihre Werte nach (26a) und (26b) ein:

$$\sin\lambda l + \frac{\lambda R_0}{r}\cos\lambda l = \frac{L_0\lambda^2}{r^2 C}\left[\lambda\cos\lambda l - \frac{\lambda^2 R_0}{r}\sin\lambda l\right].$$

Wir setzen wieder der Kürze wegen

$$\left.\begin{aligned}\frac{R_0}{rl} &= \alpha\\ \lambda l &= \beta\\ \frac{L_0}{Cl(rl)^2} &= \gamma\end{aligned}\right| \tag{27a}$$

Hiermit ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \beta\,\frac{\gamma\beta^2-\alpha}{1+\alpha\gamma\beta^4}. \tag{27b}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann, als Funktion von β aufgefaßt, durch eine Kurve von der in Figur 8 gezeichneten Form veranschaulicht werden; ihre Schnittpunkte mit der Schar der Tangenskurven ergeben die unendlich vielen reellen Wurzeln von Gl. (27b). Die beiden Seiten dieser Gleichung sind ungerade Funktionen von β; die Wurzeln kommen daher wieder paarweise entgegengesetzt gleich vor, und es brauchen nur die positiven berücksichtigt zu werden, da auch φ eine ungerade Funktion von β ist. Der Nachweis, daß imaginäre Wurzeln nicht vorkommen, kann wie in den schon erledigten Beispielen erbracht werden; nicht aber der Nachweis, daß es keine komplexen Wurzeln gibt. Wendet man nämlich (25b) und (25d) auf (VIIa) an, so erhält man

$$\int_0^l \varphi_\mu\varphi_\nu\,dx = \frac{L_0}{r^2 C}\,\varphi_\mu'(l)\varphi_\nu'(l). \tag{27c}$$

Würde man hier μ und ν auf ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln beziehen (komplexe Wurzeln der Gl. (27b) können nur konjugiert vorkommen), so käme man durchaus nicht, wie in § 4a und 4b, auf den Widerspruch, daß eine positive Größe einer negativen gleich sein soll; denn die rechte Seite von (27c) hat im Gegensatz zu den früheren (14a und 20) entsprechenden Gleichungen einen positiven Faktor. Daß sich hier der Nachweis nicht erbringen läßt, daß keine komplexen Wurzeln der (Gl. 27b) existieren, hat seinen guten Grund darin, daß es unter Umständen solche Wurzeln gibt. Dies konnte man dem Problem vom physikalischen Standpunkt von vornherein an-

1) Englisches Patent v. A. Dearlove, Nr. 8823 vom Jahre 1894.

sehen. Komplexe Wurzeln bedeuten ja, daß die entsprechenden Teilwellen nicht zeitlich nach einem einfachen Exponentialgesetze absterben, sondern daß sie gedämpft ausschwingen. Nun stellt die hier betrachtete, in Fig. 7 schematisch dargestellte Anordnung ein schwingungsfähiges System dar; es enthält neben dem Energiereservoir für elektrische Energie (die Kabelkapazität) auch ein Reservoir für magnetische Energie (die Induktivität der Spule), das mit jenem auf Grund der elektromagnetischen Gesetze in Wechselbeziehung steht. Schwingende Vorgänge, denen ein Hin- und Herpendeln der Energie zwischen den beiden Reservoiren zugrunde liegt, sind darum sehr wohl möglich. Die physikalische Anschauung lehrt uns aber noch weiteres. Denkt man sich das Kabel in bekannter Weise in Elementarwiderstände und passend geschaltete Elementarkondensatoren zerlegt, so ersieht man, daß das elektrische Energiereservoir eigentlich in unzählige, durch Widerstände getrennte Elementarreservoire zerfällt. Das Reservoir für magnetische Energie ist aber an einer einzigen Stelle konzentriert. Unser System ist daher trotz seiner verteilten Kapazität ein solches von nur einem einzigen Freiheitsgrad, hat also nur eine Eigenschwingung. Daraus folgt, daß, wenn überhaupt konjugiert komplexe Wurzeln auftreten, dies nur ein einziges Paar sein kann. Diese Eigenschaft der Gleichung (27b) dürfte auf rein mathematischem Wege nicht ohne die Verwendung weitgehender Hilfsmittel der analytischen Funktionentheorie nachzuweisen sein.

Bei der weiteren Verfolgung des Problems beschränken wir uns auf den Fall $\alpha = 0$. Wir bleiben dabei durchaus im Bereich der wirklichen Fälle, in denen α stets sehr klein ist. Dann nimmt (27b) die einfachste Gestalt an

$$\operatorname{tg}\beta = \gamma\beta^3. \qquad (27\,d)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt eine kubische Parabel dar. Wir denken uns in einem Koordinatensystem die Kurvenschar $\operatorname{tg}\beta$ und die Parabel $\gamma\beta^3$ (mit einem nicht zu kleinen Wert von γ) für positive β gezeichnet, und die Schnittpunkte der Parabel mit den Tangenskurven mit den Nummern 1, 2, $\cdots$ ν $\cdots$ versehen (Fig. 9). Den Punkt $\beta = 0$ [er entspricht der schon berücksichtigten stationären Lösung, Gl. (24a) und (24b)], zählen wir nicht mit. Dann zeigt sich, daß jedem Zweig der Funktion $\operatorname{tg}\beta$ ein Schnittpunkt, das heißt eine Wurzel entspricht. Nur zum Zweig, der durch den Koordinatenanfangspunkt geht, gehören zwei Wurzeln. Wenn man nun γ mehr und mehr verkleinert, so nehmen die Ordinaten der Parabel ab und die genannten beiden im ersten Quadranten gelegenen Wurzeln rücken mehr und mehr zusammen. Für ein bestimmtes $\gamma = \gamma_0$ fallen sie in einen Punkt; dort berührt die Parabel die Tangenslinie. Bei noch kleinerem γ gibt es im ersten Quadranten keine reellen Schnittpunkte mehr; die Parabel $\gamma\beta^3$ und der durch $\beta = 0$ gehende Zweig von $\operatorname{tg}\beta$ schneiden sich für $\gamma < \gamma_0$ nur noch im Komplexen zweimal. Der Wert $\gamma = \gamma_0$ ist als ein Übergangswert anzusprechen; man kann sagen, daß für diesen Wert die beiden reellen Wurzeln einander gleich werden, oder daß der imaginäre Anteil der beiden komplexen Wurzeln dort verschwindet, je nachdem, ob man sich der Grenze γ_0 von größeren oder kleineren Werten γ her nähert. Man kann den Wert γ_0 leicht berechnen, wenn man sich vergegenwärtigt, daß Parabel und Tangenslinie in diesem Falle eine gemeinsame Tangente haben. Es gilt also im Berührungspunkt außer der Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \gamma_0\beta^3$$

auch noch die folgende

$$\frac{1}{\cos^2\beta} = 3\gamma_0\beta^2.$$

Daraus erhält man durch Elimination von γ_0 die Gleichung

$$\frac{2}{3}\beta = \sin 2\beta$$

woraus

$$\underline{\beta = 1{,}1395\ldots = 65{,}284^0 = 65^0\,17{,}05'}$$

und somit

$$\underline{\gamma_0 = 1{,}4686\ldots.}$$

Nehmen wir ein Kabel mit einer Gesamtkapazität $Cl = 400$ Mikrofarad und einem Widerstande $rl = 10000\ \Omega$, so ist

$$\gamma = \frac{L_0}{400\cdot 10^{-6}\cdot 10000^2} = \frac{L_0}{40000}.$$

Für dieses Kabel ist γ mit allen praktisch denkbaren Spulen kleiner als γ_0, und daher hat man hier stets mit Eigenschwingungen zu rechnen. Es mag im ersten Augenblick merkwürdig erscheinen, daß gerade für sehr große L_0 der Vorgang aperiodisch wird. Das liegt natürlich daran, daß das Kabel am Anfang ($x = 0$) über die Batterie so gut wie kurzgeschlossen ist. Hätten wir dort ein offenes Ende, so wäre die Bedingung der Aperiodizität gerade umgekehrt.

Mit $\alpha = 0$ werden φ und φ' sehr einfach (26a) und (26b)

$$\varphi = a\psi = a\sin\lambda x \qquad (26\,c)$$

$$\varphi' = a\psi' = a\lambda\cos\lambda x. \qquad (26\,d)$$

Für den Moment $t = 0$ gilt nach (24c) und (VIa) mit $\alpha = 0$, d. h. $R_0 = 0$

$$E\left(\frac{x}{l} - 1\right) = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_\nu\psi_\nu + \cdots \qquad (28)$$

oder, wenn wir zunächst für die linke Seite irgendeine Ortsfunktion $\Phi(x)$ schreiben

$$\Phi(x) = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_\nu\psi_\nu + \cdots\cdots$$

Daraus, analog dem früheren

$$\int_0^l \Phi(x)\psi_\nu dx = a_1 \int_0^l \psi_1\psi_\nu dx + \cdots + a_\nu \int_0^l \psi_\nu^2 dx + \cdots$$

oder, mit Rücksicht auf (27c),

$$\int_0^l \Phi(x)\psi_\nu dx = \frac{L_0}{r^2 C}\psi_\nu'(l)\sum_{\mu \neq \nu} a_\mu \psi_\mu'(l) + a_\nu \int_0^l \psi_\nu^2 dx$$

$$\int_0^l \Phi(x)\psi_\nu dx = \frac{L_0}{r^2 C}\psi_\nu'(l)\sum_{\text{alle }\mu} a_\mu \psi_\mu'(l) -$$

$$\frac{L_0}{r^2 C} a_\nu \psi_\nu'^2(l) + a_\nu \int_0^l \psi_\nu^2 dx.$$

Nun ist

$$\sum_{\text{alle }\mu} a_\mu \psi_\mu'(l) = \Phi'(l) = -\,r\, i_{\substack{t=0\\ x=l}}.$$

Folglich

$$a_\nu = \frac{\int_0^l \Phi(x)\psi_\nu dx + \frac{L_0}{rC}\psi_\nu'(l) i_{\substack{t=0\\ x=l}}}{\int_0^l \psi_\nu^2 dx - \frac{L_0}{r^2 C}\psi_\nu'^2(l)} \qquad (29a)$$

In diese allgemeine Formel setzen wir nun für $\Phi(x)$ den speziellen Wert $E\left(\frac{x}{l} - 1\right)$ und für ψ und ψ' die Ausdrücke (26c) und (26d) ein. Es ist

$$\int_0^l \Phi(x)\,\psi\, dx = E\,\frac{l}{\beta}\left(\frac{\sin\beta}{\beta} - 1\right)$$

$$i_{\substack{t=0\\ x=l}} = -\frac{E}{rl}$$

$$\int_0^l \psi^2\, dx = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\sin\beta\cos\beta}{\beta}\right).$$

Setzt man dies in (29a) ein, so vereinfacht sich der erhaltene Ausdruck mit Rücksicht auf die Beziehung (27d) zu

$$a = -2E\,\frac{1}{\beta - 3\cos\beta\sin\beta}.$$

Man erhält hiermit

$$v = -2E\sum_\beta \frac{e^{-\beta^2\tau}\sin\beta y}{\beta - 3\cos\beta\sin\beta} \qquad (29b)$$

$$i = \frac{2E}{rl}\sum_\beta \frac{\beta e^{-\beta^2\tau}\cos\beta y}{\beta - 3\cos\beta\sin\beta}. \qquad (29c)$$

Man kann leicht zeigen, daß die v-Reihe für alle y ($y = 0$ bis 1) und $\tau > 0$ unbedingt, für $\tau = 0$ wenigstens bedingt konvergent ist; die i-Reihe konvergiert für alle τ und $y > 0$ unbedingt; sie divergiert aber für $\tau = 0$ und $y = 0$. Am Kabelanfang wird im allerersten Moment der Strom unendlich; dieses Ergebnis ist durch die Vernachlässigung des Batteriewiderstandes und der Selbstinduktivität des Kabels hervorgerufen, und es sind dazu die nämlichen Bemerkungen zu machen wie unter 3.

Bei Aufstellung der Reihen (29b) und (29c) ist nicht vorausgesetzt, daß β reell sei. Das etwa auftretende Paar konjugiert komplexer Werte von β ist daher genau so wie jedes reelle β in diese Reihen einzusetzen. Die Trennung der entsprechenden komplexen Reihenglieder in einen reellen und imaginären Anteil spart man sich am besten bis zur numerischen Rechnung auf; das Imaginäre hebt sich zum Schluß heraus, denn auch die beiden Reihenglieder werden konjugiert komplex.

Ein Blick auf die Fig. 9 lehrt, daß für alle $\nu > 1$.

$$\beta_\nu = (2\nu - 3)\,\frac{\pi}{2} - \varepsilon_\nu$$

ist, wo ε_ν mit wachsender Ordnungszahl immer kleiner wird. Für hohe Ordnungszahl ist darum sehr angenähert

$$\sin\beta_\nu = (-1)^\nu$$

und hieraus wegen (27d)

$$\cos\beta_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\gamma\beta^3}.$$

Dagegen wird mit $\gamma = 0$ (Kurzschluß am fernen Ende) die Parabel $\gamma\beta^3$ zur Abszissenachse; die beiden komplexen Wurzeln fallen heraus, und es bleiben für β die Werte

$$\beta = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots\ldots$$

Damit sind wir auf den von Thomson betrachteten Spezialfall zurückgekehrt.

7. Allgemeine Bemerkungen.

Den einfachen Beispielen, die wir in Nr. 3 bis 6 dieser Abhandlung betrachtet haben, lassen sich noch sehr viele in derselben Weise lösbare Probleme hinzufügen. Man kann z. B. den Fall untersuchen, daß an beiden Enden verschieden große Abschlußkondensatoren vorgeschaltet sind, man kann dazu auch noch den Ohmschen Widerstand berücksichtigen, u. dgl. m. Die von uns erledigten Fälle sind so ausgewählt worden, daß sie einerseits ein gewisses praktisches Interesse bieten, andererseits so einfach sind, daß der Gang der Rechnung deutlich bleibt und daß dabei doch alle in der Natur solcher Probleme liegenden Schwierigkeiten besprochen werden.

Wie wir gesehen haben, lassen sich die Vorgänge in dem aus dem Kabel und den Endapparaten bestehenden System durch Superposition einer unendlichen Reihe von Teilvorgängen darstellen, von denen jeder das Gesetz befolgt

$$a\, e^{-\lambda^2\tau}\sin(\lambda x + \varepsilon).$$

λ ist im allgemeinen reell, so daß es sich um räumliche Sinuswellen handelt, die zeitlich exponentiell gedämpft absterben. Die Natur des Systems allein (d. h. die Art der Grenzbedingungen) bestimmt die Wellenlänge ($= 2\pi/\lambda$) und die räumliche Phase (ε) jedes Teil-

vorganges; dabei stehen die Wellenlängen im allgemeinen in einem irrationalen Verhältnis (unharmonische Oberwellen). Jeder beliebige, in einem bestimmten System überhaupt mögliche elektrische Vorgang muß sich durch Superposition dieser — also nach Wellenlänge und Phase bereits festgelegten — Teilwellen darstellen lassen. Das ist ein sehr merkwürdiges Gesetz. Die unendliche Mannigfaltigkeit der in einem gegebenen System möglichen Vorgänge kommt allein dadurch zustande, daß die Amplitude a jeder Teilwelle jeden beliebigen Wert annehmen kann. Dementsprechend muß zur Berechnung aller a der elektrische Zustand des Systems in einem gewissen Moment bekannt sein. Gewöhnlich kennt man den Anfangszustand ($t = 0$), so daß also die a aus den Anfangsbedingungen zu berechnen sind. Versuchte man die a aus einem physikalisch unmöglichen (mit der Natur des Systems unverträglichen) Anfangszustand zu berechnen, so würde sich das dadurch rächen, daß die durch Superposition der Teilwellen entstehende Reihe nicht konvergiert. Mitunter ist es zur Vereinfachung zweckmäßig, einen Anfangszustand vorauszusetzen, der eben auf der Grenze zwischen der physikalischen Möglichkeit und Nichtmöglichkeit liegt (Beispiel: Thomsons Annahme eines verschwindenden Batteriewiderstandes hat zur Folge, daß bei ungeladenem Kabel im Augenblick des Einschaltens die Spannung am Geberende unstetig von Null auf E springt; dann ist $\frac{\partial v}{\partial x} = \infty$ und daher $i = \infty$); dann konvergiert die Reihe der Teilwellen nur im allerersten Moment nicht; man braucht sich aber nicht darum zu kümmern, da der Zustand des Systems in diesem Moment ohnehin bekannt ist.

Es hat sich gezeigt, daß in den Endformeln die Zeit nur in der Kombination

$$\tau = \frac{t}{(Cl)\,(rl)}$$

vorkommt. Schon Thomson sah sich hierdurch veranlaßt, an Stelle der Zeit 1 die Zeit $Cl \cdot rl$ als Zeiteinheit einzuführen oder, was auf dasselbe hinauskommt, das Produkt $Cl \cdot rl$ als Maß der durch das Kabel hervorgebrachten Verzögerung der Telegraphenzeichen zu betrachten. Bei dem einfachen Thomsonschen Problem lassen sich die für alle möglichen Kabel gültigen Kurven durch die genannte Reduktion des Zeitmaßstabes in eine einzige zusammenziehen. Berücksichtigt man die verschiedenen Grenzbedingungen, so läßt sich zwar noch dieselbe Reduktion durchführen; man erhält jedoch an Stelle einer einzigen Kurve eine ganze Schar von Kurven, da das System noch durch weitere Parameter gekennzeichnet ist, die wir je nach dem gerade vorliegenden Falle mit α, γ, δ bezeichnet haben.

Der Begriff einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit kommt in den Formeln nicht vor. Das liegt an der Vernachlässigung der Selbstinduktivität; wir haben uns dadurch auf die Betrachtung so langsam verlaufender Vorgänge beschränkt, daß eine Modifikation dieses Verlaufs wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Störungen nicht merklich ist. In den hier betrachteten Fällen ist das zulässig [1]).

8. Zahlenbeispiele.

Wir wollen die entwickelten Formeln noch auf einige konkrete Fälle anwenden. Es soll zunächst der Einfluß des endlichen Batteriewiderstands auf die Form des Zeichens untersucht werden, das durch ein einfaches Schließen der Gebetaste hervorgerufen wird. Bei vernachlässigtem Batteriewiderstand gelten für den am fernen Ende ($x = l$, $y = 1$) ankommenden Strom die Thomsonschen Formeln:

$$i_e = \mathcal{J}(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots) \quad (30a)$$

mit $\mathcal{J} = \frac{E}{rl}$, $q = e^{-\pi^2\tau}$.

Für kleine Werte von τ konvergiert die Reihe langsam und ist zweckmäßiger durch die Reihe

$$i_e = 2\mathcal{J}\sqrt{\frac{1}{\pi\tau}}\,(u + u^9 + u^{25} + \cdots) \quad (30b)$$

$$u = e^{-\frac{1}{4\tau}}$$

zu ersetzen (vergl. Nr. 3). Die hieraus zu berechnende Kurve

$$i_e / \mathcal{J} = f(\tau)$$

findet sich schon in den angeführten Schriften von Thomson und ist in Fig. 10 wiedergegeben ($\alpha = 0$).

Will man den endlichen Batteriewiderstand berücksichtigen, so tritt an Stelle der Formel (30a) oder (30b) die folgende [3, Gl. (9i)]:

$$i_e = \mathcal{J}\,2\,(\alpha + 1)\sum_{\beta}\frac{1}{(1 + \alpha + \alpha^2\beta^2)\cos\beta}\,e^{-\beta^2\tau}$$

oder [wegen (3a')]

$$i_e = \mathcal{J}\,2\,(\alpha + 1)\sum_{\beta}\frac{\cos\beta}{1 + \alpha\cos^2\beta}\,e^{-\beta^2\tau}$$

und hiermit (Gl. IV, 1a)

$$i_e = \mathcal{J}\left\{1 + 2\,(\alpha + 1)\sum_{\beta}\frac{\cos\beta}{1 + \alpha\cos^2\beta}\,e^{-\beta^2\tau}\right\}. \quad (30c)$$

Die β sind die positiven Lösungen der Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = -\alpha\beta. \quad (30d)$$

1) Durch die Integration der Maxwellschen Gleichungen für ein konzentrisches Kabel findet man, bis zu welcher Frequenz der Ansatz (1a), (1b) brauchbar ist. Vgl. J. J. Thomson, Recent researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893, S. 262, und E. Cohn, Das elektromagn. Feld, Leipzig 1900, S. 481.

Damit der Einfluß des Batteriewiderstands deutlich hervortrete, wählen wir den extremen Fall $\alpha = 0{,}5$; d. h. der Batteriewiderstand ist die Hälfte des Kabelwiderstands. (In den wirklichen Fällen ist α kleiner als 0,01; dann verläuft $\bar{i}_e$ merklich so, als ob kein Batteriewiderstand vorhanden sei.) Die folgende Tabelle enthält die ersten acht Wurzeln der Gl. (30d) mit $\alpha = 0{,}5$ und die sich hieraus ergebenden Koeffizienten von (30c).

$\alpha = 0{,}5$.

ν	β Grad	β Radiant	$\cos\beta$	$\frac{\cos\beta}{1+\alpha\cos^2\beta}$	β^2
1	131°10′	2,286	−0,6582	−0,5415	5,22
2	291°30′	5,08	+0,3665	+0,3432	25,8
3	463°54′	8,08	−0,2400	−0,2333	65,4
4	640°9′	11,17	+0,1763	+0,1736	125
5	817°57′	14,28	−0,1387	−0,1374	203
6	996°33′	17,40	+0,1142	+0,1135	302,5
7	1175°33′	20,54	−0,0968	−0,0963	421
8	1354°50′	23,64	+0,0843	+0,0839	558

Hiermit erhält man folgende Werte von $e^{-\beta^2\tau}$:

ν	$\tau =$ 0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8
1	0,877	0,7705	0,594	0,353	0,1243	0,01545
2	0,525	0,2753	0,0758	0,00576	$3{,}32\cdot10^{-5}$	
3	0,195	0,03802	0,00145	$2{,}1\cdot10^{-6}$		
4	0,044	$1{,}94\cdot10^{-3}$	$3{,}76\cdot10^{-8}$			
5	0,0063	$3{,}935\cdot10^{-5}$				
6	$5{,}22\cdot10^{-4}$	$2{,}73\cdot10^{-7}$				
7	$2{,}7\cdot10^{-5}$	$7{,}316\cdot10^{-10}$				
8	$8{,}81\cdot10^{-7}$	$7{,}79\cdot10^{-13}$				

Setzt man diese Werte in (30c) ein, so erhält man

$\tau =$	0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8
$\bar{i}_e/\mathcal{J} =$	<0,0001	0,0052	0,1114	0,4321	0,7981	0,9749

Mit Hilfe dieser Werte ist die Kurve $\alpha = 0{,}5$ in Fig. 10 gezeichnet. Man ersieht, daß der Batteriewiderstand die Tendenz hat, das ankommende Zeichen noch mehr zu verzögern und zu verbreitern.

Als weiteres Beispiel schließen wir den Fall an, daß ein Anschlußkondensator vorhanden ist. Der Batteriewiderstand soll hier — den wirklichen Verhältnissen nahekommend — vernachlässigt werden. Befindet sich der Kondensator am fernen Ende, so gilt Gl. (15c), wenn wir E/rl mit $\mathcal{J}$ bezeichnen,

$$i = i_e = \mathcal{J}\sum_{\beta}\frac{2\beta\cos\beta}{\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta}e^{-\beta^2\tau},$$

worin die β sich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\delta\beta} \qquad (30e)$$

berechnen. δ ist das Verhältnis der Abschlußkapazität zur gesamten Kabelkapazität. Befindet sich der Abschlußkondensator auf der Geberseite, so erhält man mit $\alpha = 0$ aus Gl. (23c) für den Endstrom genau dieselbe Formel. Zur Berechnung schreiben wir die Formel für $\bar{i}_e$ bequemer in der Form

$$\bar{i}_e = 2\mathcal{J}\sum_{\beta}\frac{\cos\beta}{1+\frac{\sin 2\beta}{2\beta}}\cdot e^{-\beta^2\tau}. \qquad (30f)$$

Die praktisch vorkommenden Werte von δ sind von der Größenordnung $\delta = 0{,}1$. Mit $\delta = 0{,}1$ sind die acht kleinsten Wurzeln der Gleichung (30e) bestimmt worden. Diese, nebst den sich daraus ergebenden Koeffizienten von (30f) finden sich in der folgenden Tabelle.

ν	β Grad	β Radiant	$\cos\beta$	$\sin 2\beta$	$\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$	$\frac{\cos\beta}{1+\frac{\sin 2\beta}{2\beta}}$
1	81°52′	1,429	+0,1415	0,2801	0,098	0,1288
2	246°42′	4,307	−0,3955	0,7265	0,0844	0,365
3	414°10′	7,225	+0,5854	0,9492	0,0656	0,550
4	584°30′	10,19	−0,7132	0,9998	0,049	0,680
5	757°8′	13,21	+0,797	0,9625	0,0364	0,769
6	931°37′	16,25	−0,852	0,893	0,0276	0,828
7	1107°23′	19,33	+0,888	0,817	0,021	0,870
8	1284°2′	22,42	−0,913	0,744	0,0166	0,898

Die untenstehende Tabelle gibt $e^{-\beta^2\tau}$ für einige Werte von τ.

Die aus (30f) für die entsprechenden Zeiten τ hervorgehenden Werte von $\bar{i}_e/\mathcal{J}$ sind

$\tau =$	0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0
$\bar{i}_e/\mathcal{J} =$	0,0006	0,0126	0,1020	0,1538	0,1140	0,0504	0,0336

Diesen Werten entspricht die in Fig. 10 mit $\alpha = 0$, $\delta = 0{,}1$ bezeichnete Kurve. Mit einem

ν	$\tau =$ 0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0
1	0,9503	0,9031	0,8156	0,667	0,4425	0,1959	0,1307
2	0,628	0,3958	0,1567	0,0245	0,0006		
3	0,271	0,0737	0,00544	$2{,}96\cdot10^{-5}$			
4	0,0746	0,00558	$3{,}13\cdot10^{-5}$				
5	0,01277	$1{,}63\cdot10^{-4}$					
6	0,00137	$1{,}86\cdot10^{-6}$					
7	$8{,}82\cdot10^{-5}$	$7{,}8\cdot10^{-9}$					
8	$1{,}967\cdot10^{-6}$	$3{,}87\cdot10^{-12}$					

größeren δ rücken die Ordinaten dieser Kurve in die Höhe, während zugleich das Maximum erst zu einer späteren Zeit eintritt; mit $\delta = \infty$ geht sie in die Thomsonsche Kurve ($\alpha = 0$) über.

Das Maximum von $\bar{i}_e/\mathcal{J}$ tritt im vorliegenden Fall, wie man durch Berechnung weiterer Punkte in der Nähe des Wertes $\tau = 0{,}2$ findet, ziemlich genau gerade für $\tau = 0\,2$ ein. Reduziert man die Ordinaten der Kurve auf den Maximalwert von $\bar{i}_e$ als Einheit, so ergibt sich die Tabelle

$\tau =$	0,025	0,05	0,1	0,15	0,2	0,4	0,8	1,0
$\bar{i}_e/\bar{i}_{e\,max} =$	0,0039	0,0918	0,663	0 928	1	0,741	0,328	0,218

Auch diese Werte sind in Fig. 10 als Kurve aufgetragen. Man entnimmt der Fig. 10 nun das interessante und praktisch wichtige Ergebnis, daß der Endstrom bei Verwendung von Abschlußkondensatoren relativ viel schneller ansteigt, als bei unmittelbarem Anschluß des Kabels. Daher ermöglichen die Abschlußkondensatoren eine schärfere und darum schnellere Zeichengebung, was die Praxis auf rein empirischem Wege schon lange herausgefunden hat (Englisches Patent Nr. 3453 von Cromwell Varley vom Jahre 1862).

Hieran anschließend geben wir auch ein Beispiel für die doppelseitige Blockierung des Kabels durch Kondensatoren. Das Verhältnis der Kapazität eines solchen Kondensators zur Kabelkapazität sei

$$\delta = \frac{K}{Cl} = 0{,}1. \qquad (31\,a)$$

Die „Eigenwerte" β sind aus Gl. (a), § 4c

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\beta\delta}{\beta\,\delta^2 - 1} \qquad (31\,b)$$

zu berechnen.

Der Stromverlauf am fernen Kabelende ist durch die Gleichung (b), § 4c, gegeben:

$$i_e = \mathcal{J}\sum_{\beta} \beta\delta\,\sin\beta\,\frac{1+\beta^2\delta^2}{1+2\delta+\beta^2\delta^2}\,e^{-\beta^2\tau}. \qquad (31\,c)$$

In der folgenden Tabelle sind die mit $\delta = 0{,}1$ berechneten ersten elf Wurzeln von Gl. (31b) nebst einigen andern für die numerische Rechnung nötigen Größen angegeben.

ν	β Grad	β Kadiant	$\operatorname{tg}\beta$	$\sin\beta$	$\beta^2\delta^2$	$\beta\delta\sin\beta\,\frac{1+\beta^2\delta^2}{1+2\delta+\beta^2\delta^2}$
1	150°34′	2,628	0,564	+0,491	0,069	+ 0,1086
2	304°7′	5,305	1,476	0 828	0,282	— 0,380
3	462°13′	8,06	4,020	+0,977	0,651	+ 0,702
4	625°1′	10,909	11.48	- 0,996	1,190	— 0,996
5	791°43′	13.81	3,028	+0,949	1 912	+ 1,225
6	961°30′	16,77	1.812	—0,879	2,820	— 1,400
7	1133°34′	19,78	1.355	+0,805	3,92	+ 1.528
8	1307°16′	22.81	1,082	- 0,735	5,215	— 1.024
9	1482°14′	25,86	0,9078	+0,672	6,70	+ 1,694
10	1658°3′	28,92	0,7828	—0,616	8 39	— 1,745
11	1834°40′	32,02	0,6916	+0,569	10,25	+ 1,790

Die nächste Tabelle gibt für einige Zeiten τ die Werte von $e^{-\beta^2\tau}$, die bei der hier angewendeten Genauigkeit in Frage kommen.

ν	$\tau =$ 0,0125	0,025	0,05	0,1	0,125	0,15	0 2	0,4	0,8
1	0.916	0,840	0 7066	0 500	0.4200	0.3533	0,250	0,0625	0,0039
2	0,703	0,495	0,2451	0,c 60	0.0. 97	0,0147	0,0036		
3	0,444	0,1974	0,039	0,0015	0,0003				
4	0,2255	0,051	0,0026						
5	0 0925	0,0086							
6	0,0298	0,0009							
7	0,00755								
8	0,00152								

Hiermit ergeben sich die folgenden Werte von $\bar{i}_e/\mathcal{J}$.

$\tau =$	0,0125	0,025	0,05	0,1	0,125
$\bar{i}_e/\mathcal{J} =$	0	0,0002	0,0086	0,0306	0,0348

$\tau =$	0,15	0,2	0,4	0,8
$\bar{i}_e/\mathcal{J} =$	0,0328	0,0254	0,0068	0 0004

Das Maximum von $\bar{i}_e/\mathcal{J}$ tritt etwa bei $\tau = 0{,}125$ ein. Reduziert man die Werte von $\bar{i}_e/\mathcal{J}$ auf den Maximalwert als Einheit, so erhält man die Werte

$\tau =$	0,025	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,4	0,8
$\bar{i}_e/\bar{i}_{e\,max} =$	0.006	0.247	0,879	1,000	0,942	0,730	0,195	0,012

Auch diese Werte sind in Fig. 10 aufgetragen; die Kurve ist mit $\alpha = 0$, $\delta = 0{,}1$ + 0 1 bezeichnet. Man sieht, daß bei doppelseitigem Abschluß der Strom am fernen Ende noch schneller ansteigt, und, was auch wichtig ist, schneller wieder abnimmt, als bei einseitigem Abschluß des Kabels durch einen Blockkondensator.

Über den Einfluß der Größe dieser Kondensatoren ist noch folgendes zu sagen. Je kleiner die Kapazität der Kondensatoren im Vergleich zur Kabelkapazität ist, um so rascher

erreicht der Endstrom sein Maximum, und um so schneller fällt er nachher wieder ab; trotzdem ist es aber nicht angängig, die Blockkapazität allzusehr zu verkleinern, da der absolute Wert des Maximalstroms bei fester Batteriespannung E sehr schnell mit δ abnimmt, während sich die Stromkurve einer festen Grenze nähert. (Für $\lim \delta = 0$ gelten die in § 5 entwickelten Formeln.) Es ist daher vorteilhaft, die Spannung E so groß zu nehmen, als das nur betriebstechnisch möglich ist, und dann mit Rücksicht auf die Empfindlichkeit der Empfangsapparate den günstigsten Wert von δ herauszusuchen.

9. Die mitgeteilten Berechnungen stützen sich zwar auf physikalische Grundlagen, an denen gewiß niemand zweifeln wird; da die Rechnungen aber ziemlich lang sind, so schien eine Bestätigung der berechneten Kurven (Fig. 10) durch den Versuch erwünscht, um so mehr, als auch die praktische Kabeltelegraphie ein Interesse an dieser Verbreiterung ihrer theoretischen Grundlagen hat. Die Versuche wurden an „künstlichen" Kabeln angestellt, bei denen auf jedes Leitungselement von etwa 70 Ohm Widerstand ein nach Erde geschalteter Kondensator von etwa 2 Mikrofarad kommt; das Element stellt demnach etwa 10 km Guttaperchakabel dar. Der Endstrom i_e wurde durch die Schleife eines Siemensschen Oszillographen geleitet, die ihres geringen Widerstands wegen (in der Größenordnung von 1 Ohm) den Stromverlauf praktisch nicht beeinflußt. Als Stromquelle dienten Sammlerbatterien.

Zunächst wurden die bekannten Thomsonschen Kurven aufgenommen; die Schaltung ist die der Fig. 1; der Widerstand R_0 der Sammlerbatterie ist unmerklich klein gegenüber dem Kabelwiderstand. Von den erhaltenen Kurven, Fig. 11, ist die Kurve 1 mit 100 km Kabel und 20 Volt Batteriespannung, die Kurve 2 mit 200 km und 40 Volt, 3 mit 300 km und 60 Volt, 4 mit 400 km und 80 Volt. Alle vier Kurven sind nacheinander auf dasselbe Blatt photographisches Papier geschrieben; der Zeitmaßstab ist für alle derselbe, und bei allen entspricht der Stromschluß demselben Punkt O der Zeitachse [1]); dieser Punkt ist dadurch markiert worden, daß auch ein Zeichen über die Leitung gegeben wurde, nachdem alle Kondensatoren ausgeschaltet waren.

Man findet an den Kurven das Thomsonsche Gesetz bestätigt, daß alle Kurven zusammenfallen, wenn man als Zeiteinheit das Produkt $Cl \times rl$ einführt; denn der Strom erreicht bei den verschiedenen Kabeln denselben Bruchteil seines Endwerts in Zeiten, die sich wie die Quadrate der Kabellängen verhalten.

Auch die Kurven der Fig. 12 sind mit der Schaltung nach Fig. 1 aufgenommen; bei der Kurve 1 ist der Batteriewiderstand unmerklich klein, also $\alpha = 0$; bei Kurve 2 beträgt er die Hälfte des Kabelwiderstands, d. h. $\alpha = 0{,}5$. Die Kurven stimmen genau mit den in Fig. 10 dargestellten berechneten Kurven überein. Die Kabellänge war 200 km.

Dieselbe Kabellänge gilt für die Fig. 13; Kurve 1 ist wieder die Thomsonsche Kurve. dagegen ist 2 mit einem Blockkondensator aufgenommen, dessen Kapazität ein Zehntel der Kabelkapazität beträgt ($\delta = 0{,}1$). Kurve 2 repräsentiert zwei übereinander geschriebene Kurven, von denen die eine dem Fall entspricht, daß der Blockkondensator am Anfang des Kabels liegt (Fig. 5), die andere dem Fall, daß er sich am Kabelende befindet (Fig. 3). Die beiden Kurven fallen, wie es die Theorie verlangt, genau zusammen; daß es zwei Kurven sind, erkennt man überhaupt nur an der stärkeren Schwärzung des photographischen Papiers, der doppelten Exposition entsprechend. In Fig. 10 entspricht der Kurve 2 die mit $\alpha = 0$, $\delta = 0{,}1$ bezeichnete Kurve; nur ist der Zeitmaßstab im Vergleich zum Strommaßstab in Fig. 10 größer, so daß das Maximum der aufgenommenen Kurve etwas spitzer erscheinen muß, als das der berechneten Kurve. Bei den Kurven 3 der Fig. 13 war das Verhältnis der Blockkapazität zur Kabelkapazität $\delta = 0{,}5$; wiederum befand sich der Blockkondensator einmal am Kabelanfang, einmal am Kabelende.

Eine weitere Bestätigung der Rechnung liefern die Kurven der Fig. 14, die gleichfalls an 200 km Kabel aufgenommen worden sind. Die Kurven sind dieselben, wie die in Fig. 13 mit 1 und 2 bezeichneten Kurven; jedoch sind die Kurven hier auf den gleichen Maximalwert reduziert, wie das auch in Fig. 10 geschehen ist. Bei derselben Spannung beträgt das Maximum von 2 rechnerisch, wie wir gefunden haben, genau 0,1538, also rund $^1/_6$ des Endwerts von Kurve 1; folglich muß im Falle 2 etwa die sechsfache Spannung der Batterie aufgewendet werden, um auf den gleichen Maximalwert des Endstroms zu kommen, wie im Falle 1. In der Tat war bei Kurve 1 $E = 20$ Volt, bei Kurve 2 dagegen $E = 120$ Volt.

Aus der Fig. 15 ersieht man den Einfluß, den das Verhältnis δ der Blockkapazität zur Kabelkapazität bei einseitigem Abschluß durch einen Kondensator auf den Verlauf des Endstroms i_e hat. Sämtliche Kurven sind an einem 100 km langen Kabel mit derselben Batteriespannung aufgenommen. Die oberste Kurve 1 ist die Thomsonsche; sie entspricht dem Wert

1) Die Kontaktgebung geschah durch eine auf der Achse der Papiertrommel befindliche Schaltwalze.

$\vartheta = \infty$; für die folgenden Kurven ist der Reihe nach $\vartheta = 2$, 1, 0,5, 0,25, 0,1 und 0,05. Man erkennt, wie die Kurven mit abnehmendem ϑ relativ immer steiler verlaufen, während zugleich die absolute Größe des Endstroms abnimmt. Je kleiner ϑ, um so leichter wird man also bei gegebener Telegraphiergeschwindigkeit das Telegramm lesen können, um so empfindlichere Empfangsapparate muß man aber auch anwenden, um entsprechende Ausschläge zu erhalten.

Fig. 16 zeigt die Endströme $\bar{i}_e$ bei fehlendem (Kurve 1), bei einseitigem (Kurve 2) und doppelseitigem Abschluß (Kurve 3) durch Blockkondensatoren, deren Kapazität in allen Fällen je ein Zehntel der Kabelkapazität beträgt. Die Kurven sind durch passende Wahl der Batteriespannung angenähert auf gleichen Höchstwert des Endstroms reduziert, so daß sie unmittelbar mit den Kurven der Fig. 10 ($\alpha = 0$, $\alpha = 0$, $\vartheta = 0{,}1$ und $\alpha = 0$, $\vartheta = 0{,}1 + 0{,}1$) vergleichbar sind. Damit die Endströme in allen drei Fällen auf den gleichen Höchstwert ansteigen, sollen sich, wie wir rechnerisch fanden, die Batteriespannungen wie $1 : \frac{1}{0{,}1538} : \frac{1}{0{,}0348}$ oder angenähert wie 1 : 6 : 30 verhalten; sie haben in der Tat etwa in diesem Verhältnis gestanden.

Die Tatsache, daß es für den Endstrom ganz gleichgültig ist, ob bei einseitigem Abschluß der Blockkondensator am Geber- oder am Empfängerende liegt, kann leicht zu dem Fehlschluß verleiten, daß auch der doppelseitige Abschluß auf den einseitigen Abschluß reduzierbar sei, ähnlich wie etwa ein einzelner Kondensator elektrisch gleichwertig ist zwei doppelt so großen in Serie geschalteten Kondensatoren. Bei der Kabelschaltung liegen die Dinge aber nicht so einfach; das zeigt auch die Rechnung, die für den Endstrom bei einseitigem Abschluß eine ganz andere Zeitfunktion ergibt wie bei doppelseitigem Abschluß [vgl. die Formeln (30e) und (31b), sowie (30f) und (31c)]. In Fig. 17 finden sich drei Paare hierauf bezüglicher Kurven, die mit einer Batterie von 100 Volt an einem 200 km langen Kabel aufgenommen worden sind. Bei jedem Paar gilt die untere (stärkere) Kurve für den doppelseitigen Abschluß. Beim Paar 1 geschah der doppelseitige Abschluß mit je 4 Mikrofarad ($\vartheta = 0{,}1 + 0{,}1$), der einseitige mit 2 Mikrofarad ($\vartheta = 0{,}05$); beim Paar 2 waren es zweimal 20 Mikrofarad oder einmal 10 Mikrofarad, beim Paar 3 zweimal 40 Mikrofarad oder einmal 20 Mikrofarad. Der doppelseitige Abschluß hat, wie aus den Kurven hervorgeht, den Vorteil, daß der Strom rascher verschwindet, nachdem er sein Maximum erreicht hat; das Maximum ist jedoch kleiner als bei einseitigem Abschluß, besonders bei den kleinen Werten von ϑ, die heutzutage praktisch in Frage kommen.

10. Das Alphabet der Kabeltelegraphie setzt sich bekanntlich aus positiven und negativen Elementarzeichen ebenso zusammen, wie das Morsealphabet aus Punkten und Strichen. Das negative Elementarzeichen ist gleich einem positiven, in dem alle Stromrichtungen umgekehrt sind. Das Elementarzeichen selbst entsteht dadurch, daß an das Kabel zunächst durch Schließen der Batterietaste die Batteriespannung während einer Zeit Θ angelegt und dann die Batterie entfernt und danach das Kabel an Erde gelegt wird. Demgemäß kann man sich das Elementarzeichen aus den bisher ausschließlich behandelten einfachen Stromstößen so entstanden denken: In dem Moment des Anschlusses der Batterie entsteht ein einfacher Stromstoß, dessen Zeitgesetz

$$\bar{i}_e = F(t)$$

wir für eine Reihe von Schaltungen vorhin bestimmt haben. Dieser verläuft ungestört bis zum Moment $t = \Theta$, wo das Kabel von der Batterie getrennt und an Erde gelegt wird. Statt dieses Eingriffs kann man sich im Augenblick Θ auch eine zweite Batterie von entgegengesetzt gleicher Spannung zur ersten hinzugeschaltet denken. Dann wird sich von $t = \Theta$ ab dem ersten Stromstoß ein zweiter von entgegengesetzter Richtung überlagern, der gegenüber dem ersten um die Zeit Θ verspätet ist. Der wirkliche Endstrom ist dann in der zweiten Periode

$$\bar{i}_e = F(t) - F(t - \Theta)$$

und kann graphisch sehr einfach aus der Kurve $F(t)$ gefunden werden. Die Zeit Θ nimmt man heute recht klein, etwa 0,012 bis 0,015 $(Cl)(rl)$[1]; für diesen Fall läßt sich die Differenz mit ziemlicher Genauigkeit durch den Differentialquotienten ausdrücken, und man hat

$$\bar{i}_e = \Theta F'(t). \qquad (32)$$

Man besitzt in dieser Formel einen, wenn zwar angenäherten, aber sehr einfachen analytischen Ausdruck für das Elementarzeichen. Der Bau unserer Funktionen $F(t)$ bringt es mit sich, daß die Kurve $F'(t)$ ihres Differentialquotienten relativ steiler verläuft, wie die ursprüngliche Kurve $F(t)$. Ihr analytisches Gesetz ist von der Form

$$F(t) = \sum_{\beta} f(\beta)\, \epsilon^{-\beta^2 \tau}.$$

Daher

$$F'(t) = -\sum_{\beta} \frac{\beta^2}{(Cl)(rl)} f(\beta)\, \epsilon^{-\beta^2 \tau}. \qquad (33)$$

Die Koeffizienten $f(\beta)$ erscheinen wegen des Faktors β^2 in $F'(t)$ um so mehr verstärkt, je höher die Ordnungszahl des betreffenden Gliedes

1) Tabellen über die Telegraphiergeschwindigkeit hat A. Dearlove gegeben: „Tables to find the working speed of cables" bei E. u. F. N. Spon. Neuere Angaben finden sich bei H. Larose, La Lumière électrique 7, 215, 1909.

ist; da gerade die Exponentialfunktionen hoher Ordnung die Steilheit der Kurve bedingen, so muß also $F'(t)$ relativ steiler verlaufen wie $F(t)$. Ganz entsprechend ist $F''(t)$ wieder steiler als $F'(t)$, und so fort.

Diese Einsicht setzt uns in die Lage, die Wirkung einer zum Empfänger parallelgeschalteten Spule (Fig. 7) in sehr einfacher Weise übersehen zu können, wenigstens solange die Spule eine geringe Induktivität hat, wofür wir in No. 6 die Bedingung gefunden haben, daß

$$\gamma = \frac{L_0}{(Cl)(rl)^2}$$

klein gegen 1 sei (diese Bedingung ist bei längeren Seekabeln mit allen überhaupt praktisch denkbaren Spulen erfüllt.) In diesem Falle verläuft der durch die Spule gehende Strom i_e fast ebenso, als wenn das Kabel an Erde läge; der durch den Empfänger gehende Strom ist dagegen

$$-\frac{1}{w} L_0 \frac{di_e}{dt} = -\frac{L_0}{w} F'(t),$$

da der Empfänger einem einfachen Ohmschen Widerstand w merklich gleichwertig ist. Wir sehen hieraus, daß schon der durch die Wirkung der Spule im Empfänger erzeugte einfache Stromstoß denselben Verlauf hat, wie ein ohne Spule aus einem positiven Stromstoß und nachfolgendem Kurzschluß gebildetes Elementarzeichen. Das bei Verwendung der Spule in derselben Weise gebildete Elementarzeichen wird dann dem Gesetz folgen

$$-\frac{L_0}{w}[F'(t) - F'(t-\Theta)],$$

und das ist angenähert

$$-\frac{L_0}{w}\Theta F''(t).$$

Das Zeichen muß demnach in diesem Falle wesentlich steiler verlaufen, wie bei unmittelbarer Einschaltung des Empfängers unter sonst ganz gleichen Umständen.

Man könnte in analoger Weise weitergehen und durch passende Schaltungen Elementarzeichen geben, die proportional $F^{(3)}(t)$, $F^{(4)}(t)$ usw. sind. Da jedoch dabei auch die Amplitude der Zeichen stark abnimmt, so bleiben diese Anordnungen praktisch wertlos, so lange nicht die Empfindlichkeit des Empfängers erheblich gesteigert wird.

An dieser Stelle schließen wir noch eine Bemerkung an, die besonders deutlich hervortreten läßt, was man beim doppelseitigen Abschluß durch Kondensatoren erreicht. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Abschlußkapazität klein ist im Vergleich zur Kabelkapazität. Für ihn gilt Gl. (23g)

$$\bar{i}_e = 2\pi^2\delta^2\mathfrak{J}(q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots \quad (23g)$$

mit

$$q = e^{-\pi^2 \tau}.$$

Dagegen ist der Endstrom, wenn keine Abschlußkondensatoren verwendet werden (30a)

$$\bar{i}_e = \mathfrak{J}\cdot(1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots).$$

Demnach folgt das Elementarzeichen, das durch Stromgebung während der Zeit Θ erzeugt wird, nach (32) dem Zeitgesetz

$$\bar{i}_e = \Theta \frac{2\pi^2}{(Cl)(rl)} \mathfrak{J}(q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + \cdots).$$

Man ersieht hieraus, daß das Elementarzeichen (von kurzer Dauer) bei einem Kabel ohne Blockkondensatoren dieselbe Form hat, wie ein einfacher Stromstoß bei Verwendung solcher Kondensatoren[1]). Das durch Superposition solcher Stromstöße entstehende Elementarzeichen des blockierten Kabels muß daher nach den früheren Überlegungen steiler ausfallen, wie das Elementarzeichen des nicht blockierten Kabels.

Wir wollen die Überlegungen, die zur Aufstellung einer Formel (32) für ein Elementarzeichen (einem Punkt oder Strich entsprechend) geführt haben, wieder durch ein Beispiel veranschaulichen. Wir legen ein Kabel mit doppelseitigem Abschlusse durch Blockkondensatoren zugrunde und wählen dieselben Verhältnisse, wie früher in Nr. 8 ($\delta = 0{,}1 + 0{,}1$). Die Zeit Θ des Stromschlusses sei $0{,}015\ (Cl) \times (rl)$. Nach Gl. (31h) fließt dann am Kabelende der Strom

$$\bar{i}_e = -\mathfrak{J}\cdot 0{,}015\,\Sigma\beta^3\delta\sin\beta\,\frac{1+\beta^2\delta^2}{1+2\delta+\beta^2\delta^2}e^{-\beta^2\tau}$$
$$= 0{,}015\,\mathfrak{J}\,\Sigma a\, e^{-\beta^2\tau}.$$

Die Werte von β sind der früher angegebenen Tabelle zu entnehmen; für die Koeffizienten a erhält man nach der letzten Formel die Werte

$\nu =$	1	2	3	4	5
$a =$	−0,750	+10,64	−45,70	+118,5	−234,5

$\nu =$	6	7	8	9
$a =$	+395	−599	+847	−1135

Für $\bar{i}_e/\mathfrak{J}$ ergeben sich dann die folgenden Werte

$\tau =$	0,025	0,05	0,0625	0,1
$100\,\frac{\bar{i}_e}{\mathfrak{J}} =$	0	0,883	0,948	0,293

$\tau =$	0,125	0,15	0,2	0,4	0,8
$100\,\frac{\bar{i}_e}{\mathfrak{J}} =$	−0,019	−0,163	−0,224	−0,0701	−0,0044

Sie sind in der Kurve (Fig. 18) dargestellt, in der auch die Ordinate $t = \Theta = 0{,}015\ (Cl) \times (rl)$ besonders eingetragen ist. In der praktischen Telegraphie nimmt man auch die Zeit, in der zwei Elementarzeichen aufeinander folgen, etwa gleich Θ; die einzelnen Zeichen überlagern sich darum sehr stark, so daß zum Lesen der vom Heberschreiber aufgezeichneten Telegramme eine besondere Übung erforderlich ist. Die Frage, ob ein Zeichen von einer bestimmten

1) Bei einseitigem Abschluß besteht eine so einfache Beziehung nicht.

Form günstiger ist, als ein anderes, kann darum letzten Endes nur von der Erfahrung beantwortet werden.

Wir schließen die Betrachtungen mit der Wiedergabe dreier Telegrammstreifen (Fig. 19), die auf der Strecke Emden—Horta (Azoren) des ersten deutsch-amerikanischen Kabels aufgenommen worden sind. Das Kabel ist 3529 km lang, dazu kommen 64,5 km Erdrückleitung. Der Widerstand rl ist 5764 Ω, die Kapazität $Cl = 740$ Mikrofarad. Das Kabel ist an beiden Enden durch 80 Mikrofarad blockiert. Sämtliche Streifen stellen eine regelmäßige Folge desselben Buchstabens f dar; f besteht bekanntlich aus zwei positiven, einem negativen und dann wieder einem positiven Elementarzeichen (• • ▬ •). Die Telegraphiergeschwindigkeit beträgt bei den Streifen a, b, c beziehungsweise 400, 500, 600 Elementarzeichen in der Minute. Da $Cl \times rl = 4{,}27$ sec ist, so ist demnach der Abstand zwischen zwei Elementarzeichen, wenn man die Zeit $Cl \times rl$ als Einheit wählt,

0,0351, 0,0281, 0,0234.

Drei Viertel dieser Zeit kommen auf die Stromgebung, ein Viertel auf die nachfolgende Erdung des Kabels. Wir haben unter diesen Annahmen die f-Kurven durch Superposition des berechneten Elementarzeichens konstruiert und geben diese in Fig. 20 wieder.

Auf den Streifen (Fig. 19) erscheinen keine zusammenhängenden Linien, sondern Punktreihen, da das Schreibröhrchen bekanntlich über dem Papierstreifen schwebt, ohne ihn zu berühren; die Schreibflüssigkeit tritt in Form feiner Tröpfchen aus, von denen jedes einem Punkt entspricht. Die Fig. 19 ist nach einer vergrößerten photographischen Reproduktion der Originale hergestellt.

(Eingegangen 16. September 1909.)

Beiträge zur Kenntnis der gekoppelten elektrischen Systeme[1]).

I. Teil: Das Sendesystem.

Von Johannes Kaiser.

Bezeichnungen.

$\mathfrak{J}$ = Maximalamplitude des Stromeffekts.
λ = log. Dekrement der Dämpfung.
n = Wechselzahl } der Schwingung.
λ = Wellenlänge }
L_{12} = Selbstinduktion des Primärkreises.
L_{22} = „ „ Antennenkreises.
L_{12} = Koeffizient der gegenseitigen Induktion des Primär- und Sekundärkreises.
Λ_{I} = log. Dekrement des ungekoppelten Primärkreises.
Λ_{II} = log. Dekrement des ungekoppelten Sekundärkreises.
γ = Kondensatorstellung des Drehkondensators im Meßkreise.

Die Indizes 1 und 2 beziehen sich auf die beiden durch Koppelung entstehenden Wellen.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, den Einfluß festzustellen, den die Größe der Koppelung zwischen Primär- und Sekundärsystem bei einem Braunschen Sender[1]) auf Amplitude und Dämpfung der durch die Koppelung entstehenden Wellen hat. Bisher ist eine experimentelle Arbeit über die Koppelung eines geschlossenen und eines offenen Kreises nicht veröffentlicht; jedoch liegt über die Koppelung zweier geschlossener Kondensatorkreise eine experimentelle Arbeit vor von C. Fischer[2]). In theoretischer Hinsicht sind die gekoppelten elektrischen Systeme bereits mehrfach untersucht, so besonders von M. Wien[3]) und Drude[4]).

Zum Aufladen der Kapazitäten des Flaschenkreises wurde ein Resonanzinduktor benutzt, der mit dem Strom einer Wechselstrommaschine gespeist wurde. Die Erregung wie die Tourenzahl derselben konnten mit Hilfe mehrerer variabler Widerstände (Ruhstrat) sehr genau reguliert werden. Die Stromstärke, Spannung und Energie, die der Transformator aufnahm, konnten mit empfindlichen Präzisionsinstrumenten gemessen werden. Die Funkenstrecke des geschlossenen Kreises war bei sämtlichen Versuchen eine Doppelstrecke; die ringförmigen Elektroden, die einen inneren Durchmesser von 40 mm, einen äußeren von 50 mm hatten, bestanden aus Messing. Der Luftleiter bestand bei allen Versuchen aus einer Vertikalharfe mit Gegenharfe. Beide Harfen waren gleich groß und wurden gebildet aus zehn parallelen Drähten (Phosphorbronzelitze 2 mm Durchm.) mit einem gegenseitigen Abstand von je 1 m und einer Länge von 20 m. Als Verlängerung des Luftleiters diente eine auf Holzsternen montierte Spule, deren Selbstinduktion man bequem von 0 cm bis 10^6 cm variieren konnte.

Damit man die Schwingungsvorgänge im Antennen- wie Flaschenkreise exakt und einwandfrei messend verfolgen konnte, mußte das Schwingungssystem mit einem empfindlichen Meßsystem verbunden werden. Diejenige Meßmethode, die als die zuverlässigste bezeichnet werden kann und deshalb auch hier benutzt wurde, ist die Resonanzmethode von Bjerknes. Diese besteht bekanntlich darin, daß man an den zu untersuchenden Schwingungskreis in

1) Mitteilungen der Physikalischen Versuchsstation Halle-Cröllwitz, Nr. 16 u. 17. Auszüge aus Halleschen Dissertationen.

1) Zenneck, Leitfaden der drahtlosen Telegraphie.
2) Ann. d. Phys. **22**, 265, 1907.
3) Wied. Ann. **61**, 151, 1897; Ann. d. Phys. **8**, 686, 1902.
4) Ann. d. Phys. **13**, 512, 1904.

sehr loser Koppelung einen Kondensatorkreis ankoppelt, dessen Eigendämpfung eine sehr geringe ist und dessen Kondensatorkapazität meßbar variiert werden kann. Mit Hilfe dieses Kreises wird eine Resonanzkurve aufgenommen, aus welcher die Maximalamplitude des Stromeffektes wie die Dämpfung der zu untersuchenden Schwingung zu bestimmen sind. In bezug auf die spezielle Anordnung der Schwingungs- und Meßkreise muß ich auf die ausführliche Beschreibung derselben in der Dissertation verweisen.

Es wurden nun zunächst Untersuchungen angestellt über die Genauigkeit der Messungen. Wenn man an verschiedenen Tagen oder zu verschiedenen Tageszeiten ein und dieselbe Schwingung aufnahm, so zeigte es sich, daß die Werte der Maximalamplitude größeren Schwankungen unterworfen sind, während die Dämpfung keine analogen Schwankungen zeigt. Es trat ein regelmäßiger Abfall der Amplitude stets dann auf, wenn der Funke eine längere Zeit überging. Parallel diesem Abnehmen der Amplitude ging eine Abnahme der Energie, die der Induktor aufnahm. Eine Erklärung dieser Erscheinung ließ sich auf Grund der bisherigen Versuche noch nicht geben.

Aus allen Beobachtungen über die Konstanz der Wirkung ergab sich, daß ein längerer Dauerbetrieb nach Möglichkeit zu vermeiden ist. Es zeigte sich, daß eine größere Konstanz dann erzielt wird, wenn man den Funken nur etwa 30 Minuten übergehen läßt, dann in die Funkenstrecke neue (kalte) Elektroden einsetzt, die mittels feinem Schmirgelpapier metallisch glänzend gemacht wurden. Hiervon wurde bei allen Versuchen so viel als möglich Gebrauch gemacht.

Die größeren Abweichungen der Amplitudenwerte an verschiedenen Tagen sind wohl auf atmosphärische Einflüsse zurückzuführen [1]).

Es folgen jetzt einige Versuchsreihen über die Konstanz der Wirkung bei galvanisch gekoppeltem Sender. Die Zeitangaben beziehen sich auf die Zeit, zu der die entsprechenden Resonanzkurven aufgenommen wurden. Eine Klammer hinter den Zeitangaben bedeutet, daß alle zugehörigen Kurven mit denselben Elektroden (ohne Behandlung mit Schmirgel) aufgenommen wurden. In Tabelle I blieben Welle und alle Versuchsbedingungen konstant.

Aus diesen Zusammenstellungen ergeben sich große Amplitudenunterschiede β. Aus den Werten Λ für die Dämpfung der Tabelle I ergibt sich, daß in den Dämpfungswerten der unter gleichen Bedingungen hervorgerufenen Schwingung Schwankungen bis zu 15 Proz. vorkommen; jedoch ist der wahrscheinliche Fehler bedeutend geringer, wie man sehr leicht einsieht, wenn man die Häufigkeit des Eintretens kleinerer Abweichungen vom Mittelwerte mit der größerer Abweichungen vergleicht. Es ist noch zu bemerken, daß die Dämpfungen aus den Sekanten zwischen den Ordinaten 80 und 55 der reduzierten Resonanzkurve berechnet wurden [1]); die zu den einzelnen Sekanten zugehörigen Dekremente wichen durchschnittlich um 3 bis 4 Proz. voneinander ab.

1) K. E. F. Schmidt, diese Zeitschr. **8**, 621, 1907.

Tabelle I.

Datum	Antennenkreis			Primärkreis		
	Zeit	β	Λ	Zeit	β	Λ
9. Jan. 1909	9^{30} — 10	155,5	0,057	10^{5} — $10^{2^{0}}$	83	0,053
	10^{20} — $10^{3^{5}}$	140	59	$10^{3^{5}}$ — $10^{5^{0}}$	78	51
	10^{35} — 11^{15}	151	62	11^{15} — $11^{3^{0}}$	80	52
	$11^{3^{0}}$ — $11^{4^{5}}$	146	59	11^{45} — 12	74	56
	$1^{5^{0}}$ — 2^{15}	152	57	1^{15} 1^{50}	82,6	58
	2^{30} — 2^{40}	137	59	2^{15} — 2^{25}	77	53
	3^{5} — 3^{25}	152	53	2^{45} — 3^{5}	79,5	53
	3^{45} — 4^{5}	146	55	3^{25} — $3^{4^{5}}$	80	55
	Mittel:		0,058	Mittel:		0,054
11. Jan 1909	10^{35} — 11	170	0,053	11 — 11^{25}	83	0,059
	11^{35} 11^{50}	158	60	11^{50} — 12	80	59
	1^{35} — 1^{50}	154	57	1^{35} — 2^{5}	78	57
	2^{15} — 2^{40}	140	57	2^{45} — 3^{5}	73	56
	3^{20} — $3^{3^{0}}$	151	55	$3^{3^{0}}$ — 4	75	55
	Mittel:		0,056	Mittel:		0,057

Als Endergebnis der Untersuchungen über die Genauigkeit der Messungen ergeben sich für die praktische Durchführung von Versuchen folgende Regeln: Wenn es bei den Messungen nur auf die Werte der Dämpfung ankommt, so kann man den Funken längere Zeit übergehen lassen, ohne dabei Änderungen in den Dämpfungswerten befürchten zu müssen. Will man dagegen die Amplituden verschiedener Wellen miteinander vergleichen, so empfiehlt es sich, nur die Maxima der Resonanzkurven schnell hintereinander aufzunehmen, um auf diese Weise die Amplitudenschwankungen so viel als möglich zu vermeiden.

Untersuchungen über den Einfluß der Größe der galvanischen Koppelung auf Amplitude und Dämpfung der durch die Koppelung entstehenden Wellen.

a) Ergebnisse der Theorie.

a) Für den Fall, daß die gekoppelten Oszillatoren vor der Koppelung dieselbe Wechselzahl hatten, folgt aus der Theorie: Sobald die Koppelung nicht ganz lose ist, treten sowohl im Primär- als im Sekundärsystem zwei Schwingungen mit verschiedenen Wechselzahlen auf. Die durch Koppelung entstandenen Wechselzahlen n_1 und n_2 stehen zur ursprünglichen Wechselzahl n in der Beziehung:

1) V. Bjerknes, Wied Ann. **55**, 121, 1895.

$$\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} = \frac{2}{n^2}. \qquad (1)$$

Bezeichnet man mit k_1 einen beliebigen Proportionalitätsfaktor, so läßt sich diese Gleichung stets auf die Form bringen:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{1}{\sqrt{1-k_1}}, \qquad \frac{n_2}{n} = \frac{1}{\sqrt{1+k_1}}.$$

Für den Faktor k_1 ergibt die Theorie den Wert:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \left(\frac{A_1 - A_{II}}{2\pi}\right)^2},$$

worin

$$k = \sqrt{\frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}}}$$

den Koppelungskoeffizienten bedeutet. In allen praktisch wichtigen Fällen ist k_1 von k nur sehr wenig verschieden. Ich definiere nun mit Fischer den Wert von k_1 als „Koppelungsgrad" und erhalte hierfür die Beziehung:

$$\frac{n}{n_2} = \sqrt{\frac{1+k_1}{1-k_1}}. \qquad (2)$$

Der so definierte Koeffizient ist dann jederzeit experimentell leicht bestimmbar.

b) Bezüglich der Dämpfung zeigt die Theorie für den Fall isochroner Oszillatoren, daß die Dekremente A_1 und A_2 der beiden bei Koppelung entstehenden Schwingungen mit den Dekrementen A_I und A_{II} der beiden Oszillatoren vor der Koppelung zusammenhängen durch die Beziehung:

$$A_1 = \frac{A_I + A_{II}}{2} \cdot \frac{n_1}{n}$$

$$A_2 = \frac{A_I + A_{II}}{2} \cdot \frac{n_2}{n}.$$

Hieraus folgt, daß das Dekrement der kürzeren Schwingung stets größer ist als das der längeren. Ferner ergibt sich aus diesen Gleichungen, daß das Dekrement der schnelleren Schwingung mit wachsender Koppelung zunehmen, das der längeren dagegen abnehmen muß.

c) Für die Maximalamplitude des Stromeffektes im Sekundärsystem ergibt die Theorie ein Maximum derselben für einen günstigsten Koppelungsgrad $k_1 = 0{,}6$.

β) Experimentelle Ergebnisse.

Bei allen im folgenden beschriebenen Untersuchungen über den Einfluß der Größe des Koppelungsgrades k_1 auf Amplitude und Dämpfung der entstehenden beiden Wellen, bei denen nur die galvanische Koppelung benutzt wurde, waren folgende allgemeine Gesichtspunkte maßgebend: Der Antennenkreis war absolut symmetrisch angeordnet, die Harfen und die Zuleitungen zu denselben waren gleich groß, so daß die Erregung des Senders stets in dem Strombauch geschah. Der Antennenkreis wurde bei einer einzelnen Versuchsreihe völlig unverändert gelassen, so daß der Primärkreis jedesmal auf die Eigenschwingung der Antenne abgestimmt werden mußte. Um den Koppelungsgrad k_1 zu ändern, wurde L_{12} variiert, während L_{11} und L_{22} konstant blieben. Auf diese Weise ließen sich Koppelungen von $k_1 = 0{,}06$ bis $k_1 = 0{,}74$ herstellen. Die Größe dieser Koppelungen wurde bestimmt aus Gleichung (2). Sonst blieben die sämtlichen Verhältnisse einer einzelnen Versuchsreihe ungeändert, so vor allen Dingen die Länge der Funkenstrecke wie auch die Erregung der Wechselstrommaschine. Es wurden nun zunächst genaue Resonanzkurven aufgenommen, aus denen sich die Dämpfung bestimmen ließ. Erst dann wurden nur die Köpfe dieser Kurven schnell nacheinander untersucht, um auf diese Weise möglichst einwandfreie Amplitudenkurven zu erhalten.

Gleichzeitig wurden zur Feststellung der Strahlungsintensität Versuche in einer 8 km entfernten Empfangsstation angestellt. Die nähere Einrichtung dieser Station war völlig analog der Anordnung der Sendestation [1]). Es wurden dort gleichfalls Resonanzkurven in einem doppelt induktiv gekoppelten System aufgenommen, aus denen sich Maximalamplitude und Dämpfung bestimmen ließen.

Versuchsreihe I.

Bei den hier aufzuführenden Versuchen bestand der Luftleiter aus den beiden Harfen, die an eine Spule vom Selbstinduktionskoeffizienten 295000 cm gelegt waren. Die Eigenschwingung der Antenne war $\lambda = 736$ m. Im Primärkreise war eine Kapazität $C = 5000$ cm eingeschaltet; die Funkenlänge betrug 2×5 mm. Die Eigendämpfung der Antenne war $A_{II} = 0{,}020$, die des Primärkreises 0,096.

Wie aus Tabelle II hervorgeht, erfüllen die Werte für die Wellenlängen die Gleichung:

$$\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} = \frac{2}{u^2},$$

wie es die Theorie verlangt. In bezug auf die Dämpfung ergibt sich aus Tabelle II unter Berücksichtigung der oben angegebenen Untersuchungen über die Genauigkeit der Messungen, daß die Dekremente als konstant, also von der Koppelung unabhängig zu betrachten sind. Dieses Resultat ist sehr bemerkenswert, da es im völligen Gegensatz zur Theorie steht. Ferner folgt aus Tabelle II, daß die Dekremente der Wellen im Antennen- und Primärkreise als gleich zu betrachten sind, denn die Differenzen der einzelnen Werte liegen innerhalb der Grenzen

1) G. Heinecke, Dissertation, Halle a. S. 1909.

Tabelle II. (2 × 5 mm Funken.)

			Sendestation								Empfangsstation	
			Antenne ($L = 295000$ cm)				Primärkreis ($C = 5000$ cm)				Gekoppelter Empfänger	
k_1	λ_1	λ_2	β_1	Δ_1	β_2	Δ_2	β_1	Δ_1	β_2	Δ_2	β_1	β_2
	m	m										
0,10	700	775	117	0,065	84	0,078	86,5	0,064	73	0,072		
0,208	655	810	125	0,060	72	0,072	97	0,055	68	0,073		
0,318	608	845	135,5	0,062	66,5	0,077	112	0,058	62	0,073		
0,424	560	878	146	0,060	62,5	0,076	124	0,059	57	0,066		
0,528	505	910	171	0,064	60	0,073	146	0,059	55	0,072		
			Mittel:	0,062		0,075		0,060		0,071		
0,10	700	775	113	0,065	81	0,077	88	0,065	75	0,071	76	36,2
0,208	655	810	121	0,059	72	0,078	97	0,068	67	0,070	99	34,8
0,318	608	845	130	0,060	65	0,071	107	0,061	60	0,076	113	33,8
0,421	560	878	144	0,065	61,5	0,076	121	0,055	54	0,076	120	29,4
0,528	505	910	166	0,063	58	0,074	134	0,060	50	0,077	147	26,8
			Mittel:	0,062		0,075		0,062		0,074		

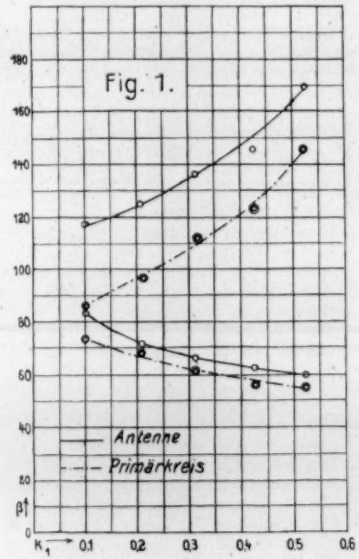


Fig. 1. Amplitude β als Funktion der Koppelung. $C_1 = 5000$ cm.

der Beobachtungsfehler. Weiter fällt es bei diesen Versuchen auf, daß die Dämpfungen sehr gering sind; denn bisher nahm man an, daß bei einem Braunschen Sender die Dämpfungen unter den Wert $\Delta = 0{,}1$ nicht heruntergehen[1]).

1) Vgl. Zenneck, Leitfaden der drahtlosen Telegraphie, S. 155. Für die Harfen wird ein Dekrement $\Delta = 0{,}15$ bis 0,20 angegeben.

Über die Ursache dieser kleinen Dämpfungen will ich später näheres berichten.

Bezüglich der Maximalamplitude folgt aus Tabelle II, daß die kurzen Wellen mit wachsender Koppelung an Intensität zunehmen, die langen Wellen dagegen abnehmen. Sehr übersichtlich werden diese Verhältnisse in graphischer Darstellung, wie sie Fig. 1 liefert. Hierbei sind die Koppelungsgrade als Abszissen, die Amplituden als Ordinaten aufgetragen, und zwar sind die Werte der ersten Beobachtungsreihe benutzt. Es ist für die Kenntnis der Strahlungsintensität noch wichtig hervorzuheben, daß die Beobachtungsresultate im Empfänger einen ganz analogen Verlauf ergeben wie die im Sender.

Versuchsreihe 2.

Um den Verlauf der Amplitudenkurve und auch das Verhalten der Dämpfung bei noch höheren Koppelungsgraden als $k_1 = 0{,}5$ untersuchen zu können, mußte die Eigenschwingung der Antenne noch weiter vergrößert oder aber die Kapazität des Flaschenkreises bedeutend vermindert werden. Bei dieser Versuchsreihe wurde das letztere Verfahren gewählt, wobei die Kapazität des Primärkreises nur 2500 cm betrug. In der Antenne befand sich eine Spule, deren Selbstinduktionskoeffizient 512800 cm war, so daß die Eigenwelle des ungekoppelten Senders $\lambda = 985$ m, die Eigendämpfung $\Delta_{II} = 0{,}011$ war. Die Eigendämpfung des Primärkreises betrug $\Delta_I = 0{,}088$. Die Beobachtungen ergaben folgende Werte (siehe Tabelle III).

Wie aus dieser Tabelle hervorgeht, zeigen die beiden Wellen einen Verlauf, der wieder ganz analog ist dem, der bei der früheren Versuchsreihe gefunden wurde. Die Dämpfungen sind auch selbst bei so festen Koppelungsgraden wie $k_1 = 0{,}74$ noch als von der Koppelung un-

Tabelle III. (2×5 mm Funken.)

			Sendestation								Empfangsstation	
			Antenne ($L = 512\,800$ cm)				Primärkreis ($C = 2500$ cm)				Gekoppelter Empfänger	
k_1	λ_1	λ_2	β_1	Δ_1	β_2	Δ_2	β_1	Δ_1	β_2	Δ_2	β_1	β_2
	m	m										
0,06	955	1015	60	0,064	54	0,069	107,5	0,059	100	0,074	81,5	69,5
0,128	922	1043	61,5	65	46	72	110	69	93	67	79	60
0,192	888	1077	65	62	43	66	117	57	80,5	75	94	58
0,260	850	1107	73,2	56	38,8	64	126	57	71	73	107,5	51
0,331	810	1140	78,5	62	34,6	75	136	55	63,5	78	139	42,5
0,400	765	1168	93	56	34,3	73	150	55	56,7	80	178,5	40,5
0,473	717	1197	103	55	31,1	78	159	61	51,4	77	211	34
0,545	667	1228	125	54	29,6	79	174	61	47,8	82	—	32
0,612	617	1254	136,5	59	29	75	192	62	45,4	76	—	24
0,677	565	1282	147	63	28,5	76	205	68	43	74	339	—
0,741	507	1310	165	68	29	78	231	66	42,5	70	429	—
			Mittel:	0,061		0,073		0,061		0,075		

abhängig zu betrachten; denn die Schwankungen in den Dekrementen sind daher zu erklären, daß infolge der Kapazität $C = 2500$ cm im Primärkreise die Funkenfolge eine sehr große war, und sich infolgedessen einige Schwankungen bei Aufnahme der Resonanzkurven zeigten. Die Amplitude der kurzen Welle zeigt wieder ein stetes Ansteigen, die der langen Welle eine dauernde Abnahme mit zunehmender Koppelung (Fig. 2).

Bei einer dritten Versuchsreihe, bei der der

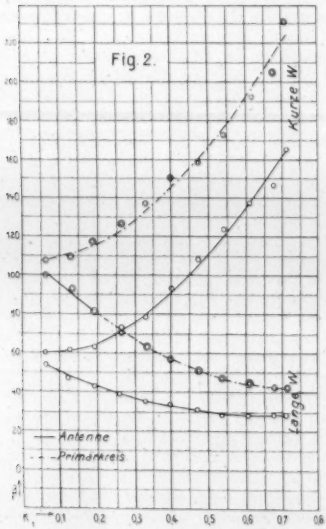


Fig. 2. Amplitude der Schwingungen als Funktion der Koppelung k. $C_1 = 2500$ cm.

Koppelungsgrad von $k_1 = 0{,}095$ bis $k_1 = 0{,}475$ variierte, ergaben sich ganz analoge Resultate wie bei den ersten beiden Versuchsreihen.

Die bisher beschriebenen Koppelungsversuche wurden, wie aus den angegebenen Zahlen hervorgeht, jedesmal ausgeführt mit einer anderen Kapazität im Primärkreise und einer anderen Induktanz im Sender. Da sich jedesmal analoge Resultate ergaben, so kann man für galvanisch gekoppelte Systeme folgende allgemeingültige Sätze aufstellen, vorausgesetzt, daß die Koppelungsgrade innerhalb der Grenzen $k_1 = 0{,}06$ und $k_1 = 0{,}74$ liegen:

1. Es entstehen in jedem Schwingungskreise je zwei Wellen, und zwar sind die entsprechenden Wellen im Flaschen- und Antennenkreise den Wellenlängen und Dämpfungen nach gleich.
2. Die Wechselzahlen der beiden Wellen erfüllen die Gleichung:

$$\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} = \frac{2}{n^2}.$$

3. Die Intensität der kurzen Welle ist stets größer als die der langen Welle.
4. Die Intensität der kurzen Welle nimmt mit wachsender Koppelung andauernd zu, die der langen Welle dagegen ab.
5. Die Dämpfung der kurzen Welle ist stets kleiner als die der langen Welle.
6. Die Dämpfungen der einzelnen Wellen sind von der Koppelung unabhängig.
7. Die Strahlungsintensität nimmt für die kurze Welle mit wachsender Koppelung ständig zu, für die lange Welle ständig ab; sie zeigt kein Maximum.

Wenn man aus diesen Ergebnissen eine Nutzanwendung machen will auf die Einrichtung der Stationen für drahtlose Telegraphie, so wird die feste Koppelung stets der losen vorzuziehen sein; denn man wird mit der festen

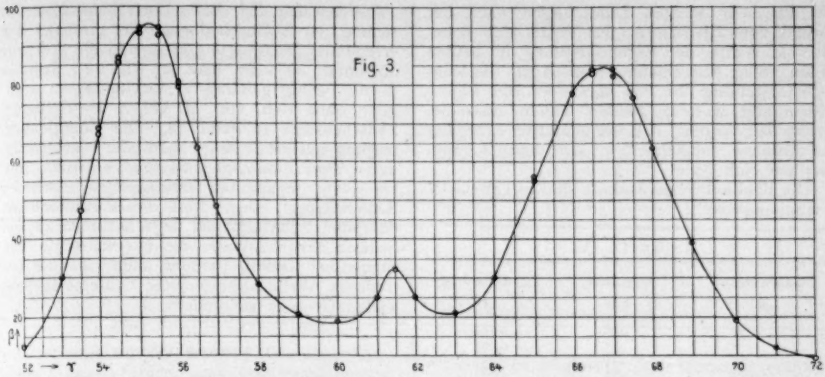


Fig. 3. Resonanzkurve eines gekoppelten Systems mit drei Wellen.

Koppelung viel größere Entfernungen überbrücken können als mit der losen Koppelung, ohne dabei infolge der Unabhängigkeit der Dämpfung von der Koppelung an Genauigkeit in der Abstimmung etwas einzubüßen.

Für zwei gekoppelte Kondensatorkreise hat C. Fischer[1]) gefunden:

1. Die Wechselzahlen der durch die Koppelung entstehenden beiden Schwingungen erfüllen die Gleichung:
$$\frac{1}{n_1^2}+\frac{1}{n_2^2}=\frac{2}{n^2}.$$
2. Die Dämpfungen der Wellen ergeben sich als von der Koppelung nahezu unabhängig.
3. Der Stromeffekt im Sekundärkreise steigt mit wachsender Koppelung sehr schnell an und erreicht bei einer ziemlich kleinen Koppelung einen Wert, über den hinaus er nur noch wenig anwächst, wenn die Koppelung immer fester wird.

Die letztere Beobachtung steht im völligen Gegensatz zu den oben mitgeteilten.

Bei sämtlichen Koppelungen wurde die Beobachtung gemacht, daß außer den beiden durch die Koppelung entstehenden Schwingungen im Antennenkreise stets noch eine dritte Schwingung auftrat, deren Wellenlänge mit der der Eigenschwingung des Senders übereinstimmte. Diese Welle ließ sich nicht im Flaschenkreise nachweisen. Die Intensität dieser Schwingung wurde um so größer, je loser die Koppelung wurde. Gegenüber den anderen beiden Wellen verschwand diese dritte Welle bei festen Koppelungsgraden fast vollständig. In Fig. 3 sind die drei Koppelungswellen in natürlicher Größe gezeichnet, wie sie bei einem Koppelungsgrade $k_1 = 0{,}095$ beobachtet wurden.

Das Auftreten der dritten Welle kann nur eine Folge der großen Unterschiede in der Funkendämpfung und der Dämpfung des Senders sein. Jene ist sehr groß, diese, wie noch unten gezeigt wird, sehr klein. Der Funke wird nach M. Wien[1]) abreißen und die Schwingung im Primärsystem unmöglich machen zu einer Zeit, wo noch merkliche Energiemengen im Antennenkreise vorhanden sind. Die Antenne wird dann mit ihrer eigenen geringen Dämpfung abschwingen.

Dieses Resultat führte zu eingehenden Untersuchungen über die Eigendämpfungen der Harfen, wenn sie über Spulen von sehr verschiedenen Selbstinduktionskoeffizienten verbunden waren. Hierbei zeigte es sich, daß die Eigendämpfung des Antennensystems in Wirklichkeit viel geringer ist, als man bisher annahm. Um die Eigendämpfung der Antenne zu bestimmen, wurde der offene Sender in sehr loser induktiver Koppelung erregt. Es entstand dann im Sender jedesmal die Eigenschwingung und die erzwungene Schwingung. Die erzwingende Schwingung wurde nun jedesmal so gewählt, daß man im Sender die Eigenschwingung wie die erzwungene Schwingung in den Resonanzkurven noch deutlich unterscheiden konnte. Ferner wurde die erzwungene Schwingung einmal kürzer, das andere Mal länger als die Eigenschwingung gemacht. Jedesmal wurden dann die Resonanzkurven aufgenommen, aus denen die Eigendämpfung berechnet wurde nach den von K. Schmidt berechneten Dekrementtafeln

1) C. Fischer, Ann. d. Phys. **22**, 269 ff., 1907.

1) M. Wien, Jahrbuch der drahtlosen Telegr. und Teleph. 1908, Heft 4.

und bei sehr kleinen Dämpfungen nach der Formel von Bjerknes. Es ergab sich dann, daß die Werte der Eigendämpfung in beiden Fällen völlig übereinstimmten. Auch die Kondensatorstellung für das Maximum der Eigenschwingung war in beiden Fällen dasselbe, woraus hervorgeht, daß die induktive Erregung der Antenne tatsächlich in sehr loser Koppelung vor sich ging.

Die Beobachtungsresultate sind in Tabelle IV zusammengestellt.

Tabelle IV.

Zusatzinduktion cm	Eigenwelle λ m	Eigendämpfung Δ
0	296	0,105
	335	0,073
	411	0,058
86 000	486	0,031
189 900	650	0,025
245 100	711	0,024
294 300	736	0,020
338 500	808	0,018
533 000	1050	0,008 (?)
942 300	1270	0,004 (?)
1 070 000	1367	0,004 (?)

Wenn man die Wellenlängen als Abszissen, die Dämpfungen als Ordinaten in ein rechtwinkliges Koordinatensystem einzeichnet, so ergibt sich eine Kurve (Fig. 4), die mit zunehmender Wellenlänge, also auch mit zunehmender Zusatzinduktanz, sehr schnell abfällt.

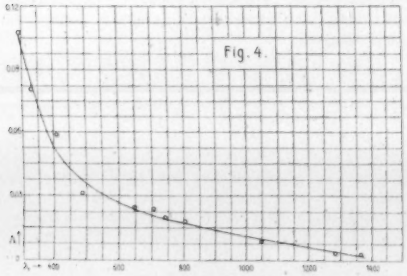


Fig. 4. Eigendämpfung eines offenen Senders.

Da die Eigendämpfung der Antenne fast ausschließlich auf Strahlung beruht, so ergibt sich hieraus, daß Systeme mit langen Eigenwellen eine geringere Energie als solche mit kurzen Eigenwellen ausstrahlen; ein Resultat, das auch durch Beobachtungen in der 8 km entfernten Empfangsstation bestätigt wurde. Andererseits hat man aber bei diesen langen Wellen den Vorzug der geringeren Dämpfung, einer Dämpfung, wie man sie bisher in offenen Sendern noch nicht kannte.

Wenn man bei dieser losen induktiven Erregung der Eigenschwingung der Antenne den erregenden Schwingungskreis auf die Antenne abstimmt, so kann man im offenen Sender direkt wenig gedämpfte Schwingungen erzeugen, ohne den von M. Wien angegebenen Zwischenkreis zu benutzen. Die Energieübertragung auf die Antenne wird eine bessere sein, wenn man den Zwischenkreis vermeidet und die wenig gedämpften Schwingungen direkt im Sender erregt. Der Vorteil dieser schwach gedämpften Schwingungen liegt natürlich in der Schärfe der Resonanz, die unerwünschte Störungen von seiten fremder, nicht auf die betreffende Welle abgestimmter Systeme in sehr weiten Grenzen ausschließt.

Zusammenfassung.

Die mitgeteilten Untersuchungen haben folgende Resultate ergeben:

1. Die Dämpfung ist mit einer Genauigkeit von etwa ± 5 Proz. aus den aufgenommenen Resonanzkurven zu ermitteln.
2. Die Maximalamplituden sind jedoch größeren Schwankungen unterworfen. Es werden für die praktische Durchführung von Versuchen Regeln angegeben, um diese Schwankungen nach Möglichkeit zu vermeiden.
3. Untersuchungen über den Einfluß der Größe der galvanischen Koppelung auf Amplitude und Dämpfung der durch die Koppelung entstehenden Wellen führen zur Aufstellung von sieben allgemeinen Sätzen, die für jedes galvanisch gekoppelte System gelten.
4. Die Strahlungsintensität nimmt für die kurze Welle ständig zu, für die lange Welle ständig ab; sie zeigt kein Maximum.
5. Außer den beiden schon längere Zeit bekannten durch Koppelung entstehenden Wellen tritt im Antennenkreise stets noch eine dritte Schwingung auf, deren Wellenlänge mit der der Eigenschwingung des Senders übereinstimmt.
6. Die Intensität dieser dritten Schwingung ist um so größer, je loser die Koppelung ist.
7. Untersuchungen über die Eigendämpfung der Antenne führen zu einer Methode, im offenen Sender sehr gering gedämpfte Schwingungen zu erzeugen.

(Eingegangen 26. September 1909.)

Beiträge zur Kenntnis der gekoppelten elektrischen Systeme.

II. Teil: Das Empfangssystem.

Von Gustav Heinecke.

Einleitung.

Die folgende Arbeit stellt sich die Aufgabe:

1. Welche Anordnungen eines Empfängers geben ein Maximum der Wirkung?

2. Mit welchem Grad von Genauigkeit und Zuverlässigkeit können die Messungen, welche zur Bestimmung der Intensität und Dämpfung der ankommenden Wellen dienen, ausgeführt werden?

§ 1. Das Empfangssystem.

Das Antennensystem der Empfangsstation besteht aus Vertikal- und Horizontalantenne; jede hat zehn parallele 20 m lange Phosphorbronzelitzen im Abstande von 1 m. Die Vertikalharfe hängt zwischen zwei Masten von 30 m Höhe und 28 m Spannweite. Die Horizontalharfe ist zwischen sechs Masten ausgespannt. Durch das sehr unebene Terrain variiert ihr Abstand vom Erdboden sehr stark. Fig. 1 gibt ein Bild dieser Verhältnisse.

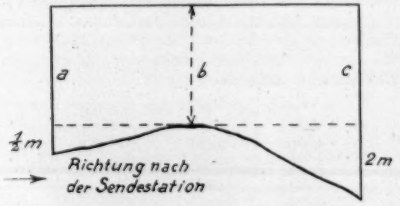


Fig. 1.

Das ganze Empfangssystem ist ein doppelt induktiv gekoppeltes und besteht aus 3 Kreisen:

1. dem Antennenkreis, der die beiden Antennen enthält, zwischen denen Induktionsspulen mit leicht zu variierendem Induktionskoeffizienten liegen;

2. dem Meßkreis, der sich aus Induktionsspulen und einem variablen Drehkondensator zusammensetzt;

3. dem Barretterkreis, der außer einer Induktionsspule und einem Glimmerkondensator einen empfindlichen Barretter enthält.

Fig. 2 gibt einen Überblick über die Schaltung.

Die Spulen *a* und *b* des offenen Kreises haben einen Durchmesser von 30 cm und bestehen aus 36 Windungen von blankem Kupferdraht von 2,8 mm Querschnitt. Sie sind aufgewickelt auf 6 parallele Ebonitstege, die jede

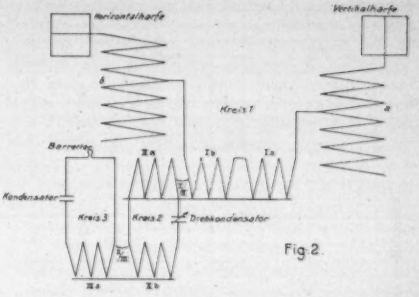


Fig. 2.

Windung in 6 gleiche Teile zerlegen und mit *A*, *B*, . . *F* bezeichnet sind. Wir bezeichnen mit D_{16} z. B. die Stelle der sechzehnten Windung am Stege *D*. Die übrigen Spulen haben einen Durchmesser von 25 cm, ihre Windungszahl ist 12 bei einem Windungsabstande von 2 mm. Die in der Figur mit *Ia*, *Ib*, *IIa* bezeichneten Spulen stehen auf einem Schlitten, ebenso die Spulen *IIb* und *IIIa*. Man kann so ihren Abstand genau ändern.

Um den Barretter vor äußeren Temperatureinflüssen zu schützen, ist er in eine Kombination von 4 ineinander gebauten Kisten gestellt, die an der Ostseite unter einem kleinen Pavillon untergebracht ist[1]). Daß der Barretter durch diesen Einbau wirklich vor äußeren Temperatureinflüssen gesichert ist, beweisen folgende Zahlen, die den Nullpunkt des Barretters angeben bei einer Versuchsreihe vom 21. Mai 1908.

	Wetterangabe	Nullpunkt			
Kurve 1	Bedeckter Himmel, schwacher Wind . . . . . 9^{25}	431	431	431	
„ 2	Himmel etwas aufgehellt, wärmer . . . . . 9^{55}	431	430	429	
„ 3	Heller, teilweise Sonne, windiger . . . . . 10^{32}	428	427	427	426
„ 4	Sonnenschein, sehr windig 10^{53}	426	425	425	424
„ 5	Himmel vollkommen aufgehellt, Wind noch stärker 12^{00}	423	423	423	
„ 6		422	422	421	

Nach verschiedenen Abänderungen erwies sich folgende Methode zur Abstimmung des Antennenkreises als außerordentlich brauchbar. Der den Barretter enthaltende 3. Kreis wird mittels der Spule *IIa* an den Antennenkreis induktiv gekoppelt. Die Selbstinduktion der Spulen *a* und *b* wird solange geändert, bis der Integraleffekt im Thermoindikator ein Maximum aufweist. In Fig. 3 ist eine solche Abstimmung kurvenmäßig aufgetragen.

1) K. E. F. Schmidt, Ann. d. Phys. **28**, 623, 1908.

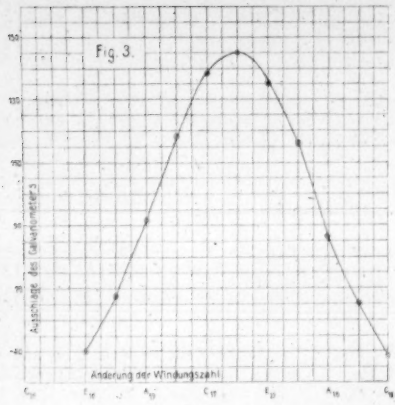


Fig. 3.

§ 2. Die Untersuchung des Antennensystems.

Es handelte sich darum, das gesamte Empfangssystem für die günstigste Wirkung einzurichten. Die erste Frage war die Beschaffenheit der Antennen. War die anfängliche Gestalt und Höhe der Antennen die günstigste?

Es wurde zunächst untersucht, in welcher Höhenlage die Horizontalharfe die beste Wirkung im Empfänger ergab. Die zuerst untersuchte Lage war (siehe Fig. 1):

$$a = 5\text{ m},\ b = 4{,}50\text{ m},\ c = 6{,}5\text{ m}.$$

Mittels des gekoppelten Systems wurde eine Resonanzkurve für die kurze Welle des gekoppelten Senders aufgenommen. Dann wurde die Horizontalharfe dreimal um je 1 m gesenkt. Die Resultate der Messungen sind in Fig. 4 dargestellt. Es zeigt sich, daß in einer bestimmten Höhe der Horizontalantenne die Wirkung im Empfänger die günstigste ist. Der Versuch wurde wiederholt, um auch gleichzeitig das Verhalten der Dämpfung [1]) beim Senken der Harfe zu beobachten. Das Ergebnis dieser Versuchsreihe ist in folgender Tabelle zusammengestellt:

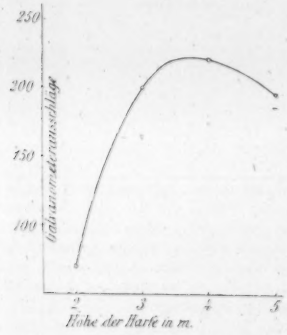


Fig. 4.

	Höhe der Horizontalharfe	Dämpfung	Amplitude
1.	$a = 4$ m, $b = 3{,}50$ m, $c = 5{,}50$ m	0,093	36,7
2.	$a = 2$ m, $b = 1$ m, $c = 3{,}50$ m	0,097	39,3
3.	$a = 2$ m, $b = 1{,}50$ m, $c = 3{,}50$ m	0,098	41,8
4.	$a = b = c = 0$	0,109	27,3
5.	Harfe geerdet durch Blitzableiter	0,121	14,8
6.	$a = 3{,}78$ m, $b = 3{,}28$ m, $c = 5{,}28$ m	0,096	44

Die Erscheinung einer günstigsten Lage der Horizontalharfe erklärt sich daraus, daß bei höher gelegener Harfe die wirksame Vertikalharfe verkleinert wird. Beim Nähern an den Erdboden würde also die Wirkung ständig zunehmen, wenn die Erde nicht einen größer werdenden dämpfenden Einfluß auf die Schwingung ausübte.

Die Tabelle zeigt eine Zunahme des Dämpfungsdekrements. Die Werte bei 2 und 3 liegen innerhalb der Beobachtungsfehler. Mit welcher Genauigkeit die Dämpfungsdekremente bei diesen Versuchen ermittelt worden sind, zeigen folgende Zahlen, welche die aus den Dämpfungskurven für die verschiedenen Ordinaten entnommenen Dekremente darstellen:

	1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch	4. Versuch
	0,092	0,096	0,099	0,109
	0,092	0,096	0,100	0,112
	0,093	0,097	0,097	0,109
	0,094	0,097	0,097	0,110
	0,094	0,098	0,098	0,108
	0,093	0,098	0,098	0,108
	0,092	0,097	0,099	0,109
Mittel:	0,093	0,097	0,098	0,109

Die einzelnen Werte weichen bei 4 maximal um 3 Proz., bei den anderen um 1 Proz. von dem Mittelwerte ab.

Das Bestreben ging nun weiter darauf hinaus, auch die Vertikalharfe so günstig als möglich zu gestalten. Eine Verbesserung konnte erzielt werden

1. dadurch, daß die Harfe leichter gebaut wurde, weil sie dann höher gezogen werden konnte, ohne die Gefahr des Bruches der Masten herbeizuführen. Der Durchhang der schweren Harfe betrug 1 m, also war auf die Weise eine Verbesserung von 20 Proz. möglich [2]);

1) Berechnung der Dämpfung nach K. E. F. Schmidt, diese Zeitschr. **9**, 13–18, 1908.

2) K. E. F. Schmidt, Jahrb. d. drahtl. Telegraphie u. Telephonie 1, 483, 1908.

2. dadurch, daß die Aufnahmefläche der Harfe vergrößert wurde.

Gemäß diesen Umständen wurde die neue Harfe folgendermaßen eingerichtet. Drei je 25 m lange Phosphorbronzelitzen wurden im Abstande von 7,6 m an dem Querseil aufgehängt, verbunden durch eine Bronzelitze. Die unteren Enden der Drähte wurden in einem Punkte ca. 7 m über der Erde zusammengeführt. Der mittlere Draht wurde unten nach vorn, d. h. in der Richtung der Sendestation abgespannt. Die mittels der beiden Harfen bei konstanten Sendebedingungen aufgenommenen Resonanzkurven ergaben eine Vergrößerung der Intensität um 37,5 Proz. gegen früher. Da die Kapazität der neuen Harfe kleiner geworden war, das System aber vorher in bezug auf die Kapazitäten der Horizontal- und Vertikalharfe ausgeglichen war, so wurde versucht, die Kapazität der neuen Harfe durch Einschalten von zwei weiteren Drähten zu vergrößern. Eine Verbesserung der Wirkung fand dadurch nicht mehr statt, wohl aber hatte jetzt die Kapazität genau denselben Betrag wie früher.

Es handelte sich noch darum, zu untersuchen, wie die mittleren Drähte unten abzuspannen waren. In der folgenden Tabelle sind die Versuchsanordnungen und Resultate angegeben:

	Abspannung	Kurze Welle 560 m	Lange Welle 840 m
1.	Alle Drähte senkrecht nach unten, in einer Fläche	201	124
2.	Die mittleren Drähte nach hinten abgespannt	215	124
3.	Die mittleren Drähte nach vorn abgespannt	240	126
4.	Wie bei 3, die äußeren Drähte noch nach der Seite abgespannt . .	240	126

Die beiden letzten Fälle ergeben also die beste Wirkung. Diese Resultate stimmen überein mit denjenigen von Zenneck[1]). Eine Harfe, die zugewandt den ankommenden Wellen ausgespannt ist, ergibt die beste Wirkung. Die ungünstigste Wirkung hat hier eine senkrecht hängende Antenne. Das wird hier seinen Grund darin haben, daß die Drähte verschieden lang sind, also wahrscheinlich Interferenzen auftreten.

§ 3. Untersuchung des doppelt induktiv gekoppelten Empfangssystems.

Orientierende Messungen der Empfangswirkung bei größeren Entfernungen der Sende- und Empfangsstation mittels eines doppelt induktiv gekoppelten Systems sind zum ersten Male von K. E. F. Schmidt[2]) in der Empfangsstation Wallwitz ausgeführt worden.

1) Zenneck, Ann. d. Phys. **23**, 860, 1907.
2) K. E. F. Schmidt, Ann. d. Phys. **28**, 622, 1908.

Die Aufgabe der folgenden Untersuchungen bestand nun darin, durch systematisch durchgeführte Messungen die Fehlerquellen zu ermitteln und die Zuverlässigkeit und Genauigkeit der erhaltenen Meßresultate exakt festzulegen. Dazu war es von größter Wichtigkeit, das Verhalten der beiden Kopplungen in bezug auf Intensität und Dämpfung genau zu ermitteln.

Zunächst wurde die Kopplung I/II des Meßkreises an den Antennenkreis geprüft. Die Untersuchung wurde durchgeführt für die kurze und lange Welle des Sendesystems. Die Resultate sind in Fig. 5 graphisch dargestellt. Als

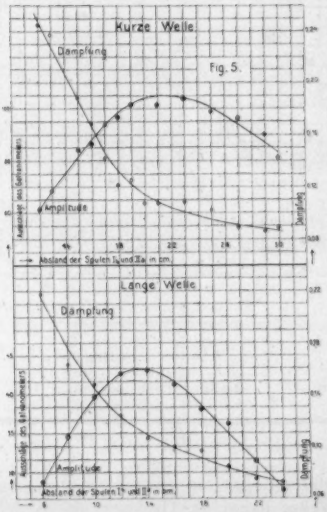


Fig. 5.

Abszissen sind die Abstände der Spulen *Ib* und *IIa* in Zentimetern aufgetragen, als Ordinaten die Intensitäten und Dämpfungsdekremente. Bei einer bestimmten Kopplung zeigt sich ein Maximum der Wirkung, an derselben Stelle flacht sich die Kurve für die Dekremente ab. Diese Erscheinung erklärt sich durch die Rückwirkung des Meßkreises auf den Antennenkreis.

Das Optimum der Kopplung ist von verschiedenen Faktoren abhängig.

Einmal spielt dabei die Entfernung der Spulen *Ia* und *Ib* eine Rolle, wie folgende Tabelle zeigt:

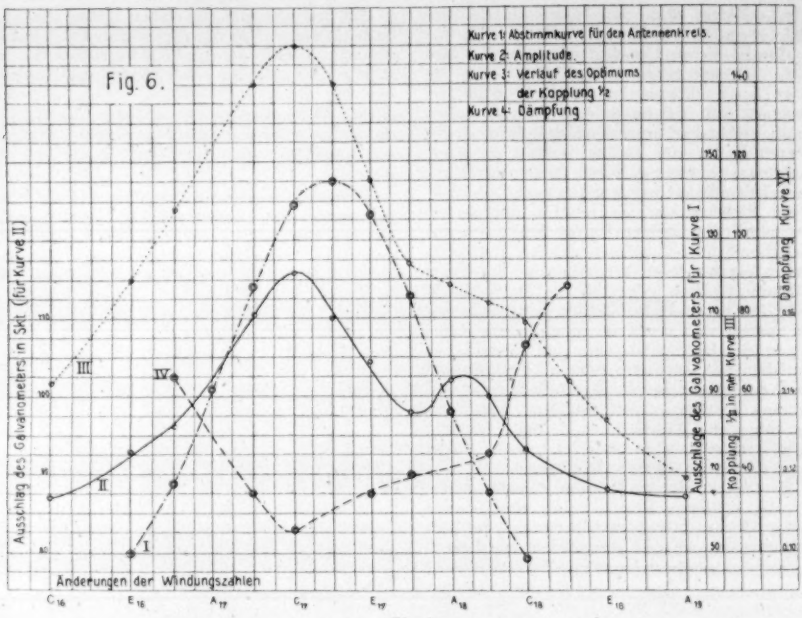


Fig. 6.

Entfernung der Spulen *Ia* u. *Ib*	Optimum der Kopplung I/II
2.5 cm	21 cm
6,2 „	19,8 „
15 „	16,5 „

Je nachdem die Spulen *Ia* und *Ib* näher oder weiter voneinander stehen, wird mehr bzw. weniger Energie auf den Meßkreis übertragen.

Weiter hängt das Optimum ab von der Abstimmung des Antennenkreises, da bei einer Verstimmung dieses Kreises die Energie geringer ist als im Resonanzfalle, das Kopplungsoptimum bei engerer Kopplung erreicht wird. Zur Festlegung dieser Abhängigkeit wurde der Antennenkreis systematisch so weit verstimmt, bis seine Eigenwelle um 70 m von der ankommenden Schwingung abwich. In Fig. 6 sind die Resultate graphisch dargestellt. Die beste Wirkung wird also nicht erzielt, wenn der Antennenkreis scharf abgestimmt ist. Die Erscheinung hat Ähnlichkeit mit dem Auftreten von zwei Kopplungswellen; die Erscheinung hat aber einen anderen Grund.

Von der Kopplung II/III des Meßkreises und Barretterkreises ist das Kopplungsoptimum I/II unabhängig.

Die Kopplung II/III zeigt ein ganz anderes Verhalten wie die Kurven der Fig. 7 zeigen. Als Abszissen wurden die Abstände der Spulen *IIb* und *IIIa* in Zentimeter abgetragen, als Ordinaten die entsprechenden Galvanometerausschläge und Dämpfungsdekremente. Da der Barretterkreis infolge seiner geringen Energie kaum auf den Meßkreis zurückwirken kann, so kann ein solches Verhalten der Intensität erwartet werden.

§ 4. Über die Genauigkeit der vorliegenden Messungen.

Die folgenden Zahlenbeispiele sollen zeigen, mit welcher Genauigkeit und Sicherheit die Intensität und Dämpfung aus den aufgenommenen Resonanzkurven ermittelt werden können.

Es wurden bei konstant bleibender Sendeenergie in der Empfangsstation in Intervallen von ca. ½ Stunde Resonanzkurven aufgenommen.

In den in Tabelle I angegebenen Werten ist der mittlere Wert des Dämpfungsdekrementes 0,149. Die größte Abweichung von diesem Werte beträgt 1,34 Proz. Die Intensität ist konstant.

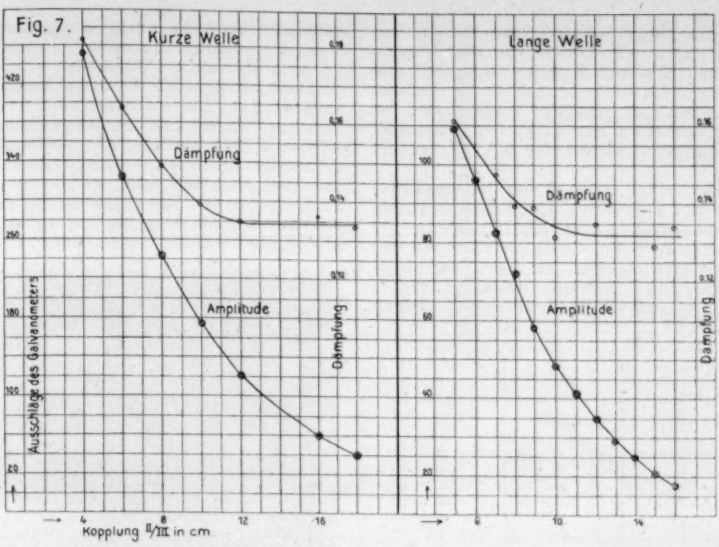


Fig. 7.

I.

Intensität	Dämpfung
60	—
61	0,151
61,5	0,147
61,5	0,149
61,5	0,150

II.

Sendeenergie	Empfangs-intensität	Dämpfung
97,6	77,5	0,126
99	81,5	0,127
91,2	74,5	0,128
139	89	0,130
134	87	0,127

III.

Sendeenergie	Empfangs-intensität	Dämpfung
108	150	0,075
107	149	0,077
108	150	—
105	150	0,075
104	150	—
91	136	0,073
—	136	0,074
93	140	0,077
—	138	0,074
91	140	0,076
—	141	0,075

In der Tabelle II schwankt die Intensität stark infolge der inkonstanten Sendeenergie. Die einzelnen Dämpfungswerte weichen um 1,5 Proz. vom Mittelwert 0,128 ab.

In der Tabelle III zeigt die Intensität nach Aufnahme der 5. Kurve ein plötzliches Sinken um 8 Proz., schwankt dann aber nur noch um 2,1 Proz. Die Dämpfung weicht vom Mittelwert 0,075 um 2,7 Proz. ab.

Gegenüber dieser guten Konstanz an vielen Tagen kommen auch Beobachtungen vor, wo die Dämpfungsdekremente wahrscheinlich infolge atmosphärischer Einflüsse erhebliche Schwankungen zeigen.

(Eingegangen 26. September 1909.)

Die Empfindlichkeit des Barretters.

Von Béla Gáti.

Auf dem im September des Jahres 1908 in Budapest[1]) stattgehabten Kongresse der Telegraphen- und Telephontechniker erwähnte ich, daß bei Anfertigung des Halbmikron (0,0005 mm) Platinbarretters durchschnittlich nur 1—2 Proz. sämtlicher hergestellter Barretter sich brauchbar erwies.

1) Comptes Rendus de la première conférence internationale des techniciens des télégraphes et téléphones. „Description et utilisation de la méthode pour la mesure des constants de ligne au moyen du barretter". S. 10.

Wegen dieser Schwierigkeiten in der Herstellung, habe ich damals von der Verwendung der Halbmikron-Barretter abgesehen. Für Telephonströme wären ja auch die Zweimikron-Barretter in Luft genügend empfindlich[1]), da ich mit denselben den vollen (50°) Ausschlag des Zeigergalvanometers auf 900 Mikroampere erhielt.

Zufolge einer Anfrage des Physikalischen Instituts der Technischen Hochschule in Danzig habe ich jedoch später die Herstellung der Halbmikron-Barretter wieder aufgenommen und bin nach monatelangen Versuchen endlich zu jenen Resultaten gelangt, welche in Fig. 1, Kurve I dargestellt sind. Mit einem Zeiger-

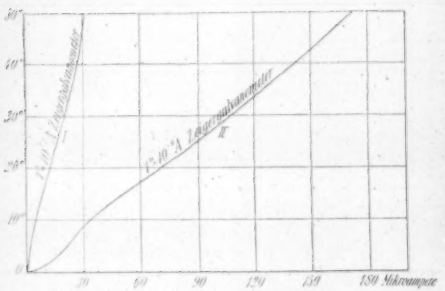


Fig. 1.

galvanometer von der Empfindlichkeit $1^0 = 10^{-7}$ Ampere erhielt ich 50° Ausschlag bei 31 Mikroampere, 5° Ausschlag bei 1 Mikroampere Hochfrequenzstrom. Meines Wissens stellen diese Daten die empfindlichsten bisherigen Messungen der Hochfrequenztechnik dar.

Als Mikroamperemeter verwendete ich ein Paulsches Fabrikat, die sogenannte „Single pivot" Type ohne Fadenaufhängung.

Dieses Galvanometer erfordert eine horizontale Einstellung mittels Libelle und ist deshalb auf schwankenden Schiffen nicht zu gebrauchen.

Kurve II bezieht sich auf den gleichen Barretter, jedoch in Verbindung mit einem zehnmal unempfindlicheren Mikroampere. Diese Amperemetertype von der Empfindlichkeit $1^0 = 10^{-6}$ Ampere erfordert keine Libelleneinstellung und kann deshalb auch auf fahrenden Schiffen Anwendung finden. Fig. 2 ist die Abbildung dieses Galvanometers mit dem Barrettersatze.

Die ganze Apparatur ist tragbar eingerichtet und speziell für Messungen außerhalb des Laboratoriums bestimmt. Sie verträgt auch eine weniger sorgfältige Behandlung.

Nach Duddells Versuchen ist bei der drahtlosen Telegraphie die ankommende Hochfrequenzstromstärke multipliziert mit der Distanz zwischen Sender- und Empfängerstation eine konstante Zahl, beiläufig 10000 Mikroampere-Kilometer. Leider wurde dieses Gesetz bisher von niemanden auf mehr als 100 km Entfernung nachgeprüft. Sofern das Gesetz auch auf 1000 km Entfernung gültig ist, so wäre bei 1000 Kilometern der ankommende Strom im

Fig. 2.

Empfänger 10 Mikroampere, demnach mit Schiffsinstrumenten noch bequem meßbar.

Laut Mitteilungen des Herrn K. E. F. Schmidt[1]), stellen derzeit 100 Mikroampere die Meßgrenze bei Thermoelementen für Arbeiten mit schnellen elektrischen Schwingungen dar. Ich bedaure, daß bei Hochfrequenzmessungen die Forscher die Stromstärke gewöhnlich nur in Galvanometergraden und nicht in Mikroamperen auszudrücken pflegen, so daß ich keinen endgültigen Vergleich anstellen kann; ich glaube jedoch, daß bei Arbeiten mit Luftbarrettern in Verbindung mit Zeigergalvanometern rund 1 Mikroampere die Meßgrenze ist, d. h., daß diese Messung ca. 100 mal empfindlicher ist, als jene mit Thermoelementen in Vakuum und mit Spiegelgalvanometern.

Das Evakuieren des Halbmikron-Barretters ist mir bisher noch nicht gelungen und wäre ich für eventuelle Ratschläge in dieser Richtung sehr dankbar. Mit empfindlichen Spiegelinstrumenten läßt sich natürlich die Empfindlichkeit meiner Meßmethode noch wesentlich steigern, ich glaube jedoch, daß derzeit kein dringendes Bedürfnis dafür vorliegt, Hochfre-

1) l. c., Seite 13.

1) Diese Zeitschr. **10**, 438, 1909. Über die Grenze der Leistungsfähigkeit der Thermoelemente.

quenzströme auch unter 1 Mikroampere messen zu können.

Die aus 1000 km Entfernung ankommenden Gesprächströme der Ferntelephonie sind bereits bei 50 Mikroampere nicht zu verstehen; es liegt also bei Ferntelephonie keine Notwendigkeit für noch empfindlichere Messungen vor. Wenn dagegen vielleicht jemand bei der drahtlosen Telegraphie noch empfindlichere Messungen vornehmen will, so würde ich die Anwendung hochempfindlicher Galvanometer empfehlen, welche natürlich einen kleinen Ohmschen Widerstand besitzen müssen.

Meiner Ansicht nach dürfte auch der Halbmikron-Barretter noch nicht die Grenze nach unten für die Barretterdurchmesser darstellen. Wenn man erst einmal die genügende Gewandtheit mit diesen unsichtbar dünnen Drähten sich angeeignet hat, wird man wohl auch mit noch dünneren Drähten arbeiten können, diesbezügliche Versuche sind derzeit im Gange.

Ich hoffe, daß es möglich sein wird auch Drähte mit 0,0001 mm herstellen und für Barretter verwenden zu können.

Die Halbmikron-Barretter brennen in Luft bei beiläufig 3 Milliampere Stromstärke durch. Der Optimum-Grundstrom ist 2,5 Milliampere. Schon vor Erreichung von 3 Milliampere ist der Nullpunkt nicht mehr konstant; der Optimum-Grundstrom fällt also auch in diesem Falle mit dem praktisch anwendbaren Grundstrom zusammen.

Beim Zweimikron-Barretter ist der Optimum-Grundstrom 18 Milliampere und auch hier wird über 20 Milliampere der Nullpunkt inkonstant.

Fig. 3 stellt den Zusammenhang zwischen den Grundstromstärken und jenen Hochfrequenzströmen dar, welche den maximalen Ausschlag von 50" am Barretterzeigergalvanometer hervorrufen. Das Optimum liegt bei 2,5 Milliampere Grundstrom.

Wie man sieht, vergrößert sich die Empfindlichkeit mit dem Wachsen des Grundstromes sehr schnell.

Der Widerstand des Barretters beträgt 350 Ohm, jener des Galvanometers 300 Ohm.

Bei den Messungen der drahtlosen Telegraphie können also die Meßsätze nicht direkt in den Antennenkreis eingeschaltet werden. Mit dem Barretterwiderstande kann man bis auf 10 Ohm heruntergehen, doch muß in diesem Falle auch das Galvanometer einen kleinen Ohmschen Widerstand besitzen.

Ich hoffe, daß der Halbmikron-Barretter in vielen Fällen auch dort willkommen sein wird, wo bis jetzt gewissermaßen eine Scheu gegen Hochfrequenzmessungen existiert.

Bei der Konstruktion meines Instrumentes wurde ich von vielen Seiten unterstützt. Ich halte es daher für meine Pflicht, auch an dieser Stelle meinen Dank zum Ausdruck zu bringen und zwar:

der ungarischen Akademie der Wissenschaften, die mich finanziell unterstützte,

den Herren Obermechaniker Heinrich Tolnai und Gustav Valló, welche die Kunstgriffe beim Arbeiten mit diesem unsichtbaren Material ausfindig gemacht haben,

der Firma W. C. Heraeus in Hanau, die auf meinen Wunsch die Fabrikation von Wollastondrähten auf Stärken von 10 Mikron bis 0,5 Mikron und darunter ausgedehnt hat,

der Firma Robert W. Paul in London, die ihre Galvanometer für tragbare Anordnung ausbildete, sowie allen jenen, die mir mit Ratschlägen behilflich waren.

(Eingegangen 1. Oktober 1909.)

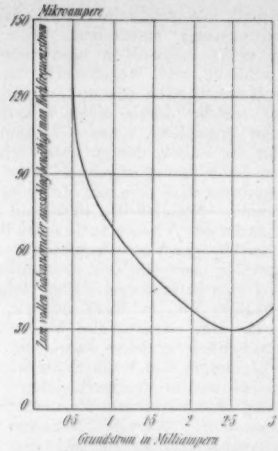


Fig. 3.

Über die Empfindlichkeit von Barretteranordnungen.

Von Hans Zöllich[1].

1. Bei Messungen mit dem Barretter wird bekanntlich die Intensität der elektrischen Schwingungen nach der Widerstandsänderung beurteilt, welche die in den Wollastondraht des Barretters hineingeleitete Schwingung durch Erwärmen desselben hervorruft. Man kann

1) Mitteilung aus der physikalischen Versuchsstation Halle-Cröllwitz Nr. 21.

nun prinzipiell alle möglichen Methoden der Widerstandsmessung anwenden. Jedoch die Forderung einer schnellen und bequemen Messung schließt von vornherein die zeitraubenden Nullmethoden aus und verlangt Anordnungen, welche durch einen schnell sich einstellenden Ausschlag eines Galvanometers ein Maß für die Stärke der zu untersuchenden elektrischen Schwingung ergeben. Aber selbst derart umgeformt sind viele der Methoden noch zu umständlich. Nun ist die einfachste Schaltung offenbar die der Wheatstoneschen Brücke, wie sie in der hiesigen Versuchsstation für drahtlose Telegraphie seit längerer Zeit üblich ist. Jedoch wird man in manchen Fällen einige Unbequemlichkeiten mit in Kauf nehmen, wenn man dadurch eine wesentliche Verbesserung der Empfindlichkeit erzielen kann, die einerseits ohne besondere technische Schwierigkeiten erreichbar ist und andererseits nicht beeinträchtigt wird durch stärkeres Hervorheben der immer vorhandenen störenden Nebenumstände (z. B. Thermoströme). Es entsteht also die in dieser Ausdehnung noch nicht behandelte Frage: Wie weit kommt man praktisch mit den einzelnen Anordnungen? Die Berechnungen, die ich auf Veranlassung von Prof. K. E. F. Schmidt darüber anstellte, führten zu dem Ergebnis, daß die Schaltung der Wheatstoneschen Brücke vollkommen ausreicht, ja den komplizierten Anordnungen in mancher Beziehung überlegen ist. Im folgenden soll daher zur Veranschaulichung der Untersuchung die Wheatstonesche Brücke behandelt werden.

2. Ganz allgemein lautet die Aufgabe: es liegt vor ein Barretter mit einer bestimmten Charakteristik $E = E(i)$; gesucht wird diejenige Anordnung und Bemessung der Widerstände in der Schaltung, sowie diejenige Stärke des Meßstromes, welche bei derselben Intensität der in den Barretter hineingeleiteten Schwingung den größten Galvanometerausschlag bewirken, bzw. den stärksten Strom im Galvanometerzweige hervorrufen. Ist i_B der erwähnte Meßstrom im Barretter — er wird in der Regel als Belastungsstrom bezeichnet —, $W(i_B)$ der entsprechende Barretterwiderstand, i_G der Strom im Galvanometerzweig, δi_S die Intensität der elektrischen Schwingung (der Einfachheit halber als ungedämpft angenommen), so wird der durch die Schwingung (indirekt) hervorgerufene Strom im Galvanometerzweig auf Grund der Annahme $i_G = f(W_B)$ nach dem Taylorschen Satze folgendermaßen anzusetzen sein:

$$\delta i_G = \frac{d i_G}{d W_B}\delta W_B + \frac{1}{2}\frac{d^2 i_G}{d W_B^2}\delta W_B^2 + \cdots;$$

$$= \frac{d i_G}{d W_B}\frac{d W_B}{d i_B}\delta i_S \cdots;$$

also der Ausschlag bei Widerstand w_g des Galvanometers:

$$c = c_0\sqrt{w_g}\,\delta i_G = c_0\sqrt{w_g}\,\frac{d i_G}{d W_B}\frac{d W_B}{d i_B}\delta i_S + \cdots \quad (1)$$

Das soll ein Maximum werden; man hat also die partiellen Differentialquotienten von δi_G, bzw. c nach allen in Betracht kommenden Variabeln gleich Null zu setzen, um die gesuchten ausgezeichneten Werte der letzteren zu erhalten; dabei kann man sich auf das erste Glied beschränken:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \dfrac{\partial}{\partial i_B}\left(\sqrt{w_g}\,\dfrac{d i_G}{d W_B}\dfrac{d W_B}{d i_B}\right) = 0\,, \\ \text{b)} & \dfrac{\partial}{\partial m}\sqrt{w_g}\,\dfrac{d i_G}{d W_B} = 0\,, \\ \text{c)} & \dfrac{\partial}{\partial n}\sqrt{w_g}\,\dfrac{d i_G}{d W_B} = 0 \end{array}\right| \quad (2)$$

— — — — — — — —

Hier ist $\dfrac{d W_B}{d i_B}$ durch die „Charakteristik" gegeben, also unabhängig von der Schaltung und kommt darum in (b), (c) nicht vor, wo $m, n \ldots$ Variable der Schaltung sind, und zwar $w_1 = m W_B$, $W_2 = n W_B$. $\dfrac{d i_G}{d W_B}$ läßt sich nach den bekannten Kirchhoffschen Regeln für jede gegebene Schaltung leicht berechnen; für die Wheatstonesche Brücke insbesondere ist nach den Bezeichnungen der Fig. 1, wenn auf Stromlosigkeit im Galvanometerzweige abgeglichen ist:

$$\frac{d i_G}{d W_B} = i_B\frac{W_B + w_1}{w_1}\,\frac{w_2}{w_g(W_B + W_2 + w_1 + w_2) + (W_B + w_1)(W_2 + w_2)}$$

$$= \frac{i_B}{W_B}\,\frac{1}{k\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + 1 + m};$$

wo

$$w_2 = m\,n\,W_B,$$
$$w_g = k\,W_B.$$

Dies eingesetzt in (2) gibt als Maximalbedingung bei Beachtung, daß $m, n, k > 0$:

$$m = 0;\ n = \infty;\ k = \frac{1 + m}{1 + \dfrac{1}{n}} = 1.$$

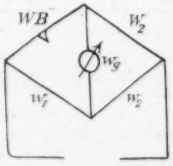


Fig. 1. Schema der Brückenschaltung.

Es ergibt sich also ein idealer, praktisch nicht realisierbarer Fall als Optimum [1]).

3. Die Frage ist nun, wie tief wird die Empfindlichkeit herabgedrückt, wenn man eine Anordnung der Widerstände in den einzelnen Zweigen wählt, die durch Werte von m, n gekennzeichnet ist, welche nur eine sehr grobe Annäherung an den idealen Fall darstellen. Das zeigt uns Fig. 2. Doch sei zuvor die Frage der Galvanometerempfindlichkeit gestreift. Die bisherige Entwickelung galt für Nadelgalvanometer; jedoch kann sie auf die jetzt fast allein gebräuchlichen Spulengalvanometer übertragen werden, nur hat hier k eine andre Bedeutung.

Die Voltempfindlichkeit eines Spulengalvanometers ist um so größer, je kleiner der Widerstand des Gesamtschließungskreises der schwingenden Spule ist [2]). Unter eine gewisse Grenze, den sogen. Grenzwiderstand — eine Instrumentenkonstante — kann man aber nicht heruntergehen, da sonst Kriechen auftritt. In unserem Falle ist der Widerstand des Gesamtschließungskreises

$$W_G = \frac{(W_B + w_1)(W_2 + w_2)}{W_B + W_2 + w_1 + w_2} = W_B \frac{1 + m}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Die größte Empfindlichkeit bei gegebener Schaltung ergibt sich also für ein Galvanometer, dessen Grenzwiderstand gleich diesem W_G ist (Spulenwiderstand $w_g = 0$); und der Ausschlag ist $c = c_0 \sqrt{W_G}\, \delta i_G$, so daß die obigen Formeln auch hier gelten:

$$c = c_0 \frac{i_B}{\sqrt{W_B}} \frac{1}{2\sqrt{(1+m)\left(1+\frac{1}{n}\right)}} \frac{dW_B}{di_B} \delta i_S. \qquad (3)$$

4. Hiernach ist Fig. 2 konstruiert. Man sieht, daß das Maximum des Ausschlages für $m = 0$, $n = \infty$ erreicht ist, daß aber schon $m = 0{,}01$, $n = 100$ so nahe an den Grenzfall herankommen, daß es unsinnig wäre, in der Praxis noch weiter zu gehen. Vielmehr wird man sich sogar mit den Werten $m = 0{,}1$, $n = 10$ begnügen, da dann gegen den sonst üblichen Fall der Gleichheit aller Widerstände: $m = n = 1$ schon eine 82proz. Erhöhung des Ausschlages erzielt wird, während $m = 0{,}01$, $n = 100$ erst eine 96proz. Erhöhung geben.

5. Ferner sprechen gegen die Wahl von extremeren Werten verschiedene Gründe. Zunächst muß man berücksichtigen, daß in den einzelnen Zweigen Thermokräfte entstehen oder durch Erwärmung von Kupferzuleitungen — während einer Versuchsreihe — Widerstandsänderungen zustande kommen können. Daher hat man sich in allen Zweigen beliebige EMK.

1) Vgl W. Jaeger, Zeitschr. f. Instrkde. **26**, 1906.
2) Jaeger, Zeitschr. f. Instrkde. 1903.

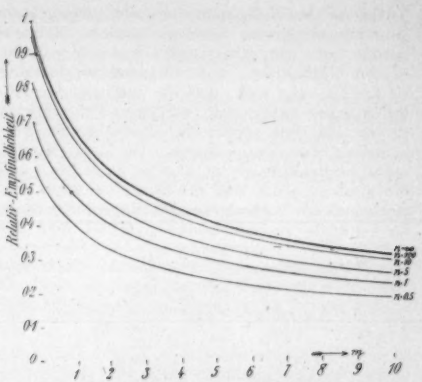


Fig. 2. Die Empfindlichkeit bei allen Widerstandsverteilungen in der Wheatstoneschen Brücke und jeweilig günstigster Galvanometerschaltung.

zu denken und den Einfluß derselben auf den Ausschlag zu berechnen. Es zeigt sich, daß die Vergrößerung von W_2 zu W_B günstig wirkt, insofern als die Wirkung der störenden Einflüsse stark herabgemindert wird, während die Verkleinerung von w_1 gegen W_B schädlich ist infolge Verstärkung der störenden Einflüsse, die um so größer ist, je größer n; $n = 100$ ist wohl schon zu hoch, 10 aber sicher noch niedrig genug. Auch wegen des Quecksilberkontaktes am Brückendraht, der bei Erschütterungen die Abmessungen etwas — sei es auch nur ganz wenig — ändert, darf kein zu großes n genommen werden; die Unruhe des Galvanometers würde zu groß werden.

6. Es sind jetzt noch einige Fehlerquellen zu berücksichtigen, wenn man über die Wheatstonesche Schaltung ein Urteil fällen will; sie könnten sich ja möglicherweise bei andern Methoden vermeiden lassen.

Man beobachtet z. B. häufig ein langsames Wandern des Nullpunktes während einer Versuchsreihe. Das rührt aber zum größten Teil vom Wechsel der Außentemperatur her, der — nachdem die Schaltung abgeglichen war — sicher von großem Einfluß ist, erwärmt doch eine elektrische Schwingung mit 300 mm Ausschlag auf 1 m den Barretter nur um etwa einen Grad.

Diese Fehlerquelle, die natürlich mit der Empfindlichkeit jeder Barretteranordnung wächst, läßt sich nur vermeiden, und das auch ausreichend, durch ein Bad von Paraffinöl, in das der Barretter gestellt wird. Die Thermokräfte, die z. T. an dem Wandern des Nullpunktes schuld sein könnten, sind schon in 5. erwähnt.

7. Es handelt sich jedoch weniger um das

Variieren des Nullpunktes an sich, dieser kann ja stets abgelesen werden, sondern vielmehr darum, ob die Ablesungen trotz der veränderten Verhältnisse untereinander vergleichbar sind. Es zeigt sich, daß die entstehenden Abweichungen unter jede mögliche Fehlergrenze sinken, so daß sogar die abweichenden Verhältnisse von Versuchsreihe zu Versuchsreihe nicht berücksichtigt zu werden brauchen; und die sind so groß, daß die Skala bei einer Einstellung vom vorhergehenden Tage nicht mehr im Fernrohr zu sein braucht. Führt man das auf die Widerstandsänderung des Barretters von W_B zu W_B' zurück, so ergibt die Rechnung:

$$\varepsilon : \varepsilon' = W_B' : W_B$$

(ε ε' die Ausschläge unter sonst gleichen Umständen). Auch wenn man für W_B', W_B die extremsten Werte einsetzt (z. B. 30° Differenz), fallen die Abweichungen unter die Fehlergrenze der Beobachtung, wenn nur jedesmal vorher die Brücke abgeglichen wird. Ferner kann i_B nie genau eingestellt werden, worauf die Notwendigkeit einer stets erneuten Abgleichung z. T. auch zurückzuführen ist. Auch das ist nicht von Belang, weil die Barretter meist ein flaches Optimum der Belastung besitzen (vgl. 10), also an benachbarten Stellen die gleiche Empfindlichkeit (bei sonst gleicher Schaltung) besitzen.

8. Die erwähnten Fehlerquellen finden sich für alle andern Schaltungen, die Wheatstonesche Brücke genügt also. Man könnte aber noch daran denken, mit zwei gleichen Barrettern zu arbeiten in den Zweigen W_B und w_2 und beide mit der gleichen Schwingung zu beschicken. Der Ausschlag würde sich um 100 Proz. vergrößern, aber infolge der stets vorhandenen Verschiedenheiten der Barretter würden die Verhältnisse so kompliziert, daß diese Anordnung für absolute Messungen ganz unbrauchbar wird.

9. Endlich sei noch auf einen Umstand hingewiesen, durch den die Ausschläge in Wirklichkeit nicht so groß werden, wie die Theorie angibt: der Spulenwiderstand des Galvanometers kann technisch nicht unter eine bestimmte Grenze gebracht werden; ferner muß man Galvanometer mit bestimmtem „Grenzwiderstand" benutzen, da nur ein paar Typen konstruiert werden können. Ist der Grenzwiderstand

$$w' = k W_G,$$

der Spulenwiderstand

$$w_g = l W_G,$$

wo W_G der verlangte Grenzwiderstand der Theorie, so hat man nach Jaeger (a. a. O.) den berechneten Ausschlag zu multiplizieren mit

(4) $\dfrac{\sqrt{k}}{1+l}$, um den tatsächlichen zu erhalten.

Beispiel: $w' = 60\ \Omega$ (S. u. H.); $W_G = w_B$, bei $m = 0{,}1$, $n = 10$

$$= 100\ \Omega.$$

a) $w_g = 30\ \Omega$: $\dfrac{\sqrt{k}}{1+l} = 0{,}60.$

b) $w_g = 20;\ 15\ \Omega$: $\dfrac{\sqrt{k}}{1+l} = 0{,}65;\ 0{,}67$, also 8 Proz., 11 Proz. Verbesserung gegen (a).

Mit (3) und (4) hat man die Formeln, um damit die Dämpfungskurven alle auf einen bestimmten Fall zu reduzieren und so untereinander vergleichbar zu machen, auch wenn man mit verschiedenen Schaltungen und Galvanometern gearbeitet haben sollte. Solange also für das in (3) stehende δi_S bei gedämpften Schwingungen noch nicht die richtige Bedeutung gefunden ist, könnte man $\dfrac{\delta W_B}{W_B}$ aus jenen Formeln berechnen und diese Werte als die Ordinaten der Resonanzkurven benutzen, worauf die Konstruktion der Dämpfungskurven wie üblich erfolgt. Das wäre wenigstens ein Schritt zu dem Ziel der absoluten Dämpfungsmessungen, indem zunächst der Einfluß der Schaltung auf die Dämpfungswerte eliminiert wird.

10. Wir hatten bisher das Optimum der Wirkung nur so weit betrachtet, als es die Schaltung, speziell die Gleichungen (2) b, c betraf. Daneben steht noch (2) a zur Diskussion, die eine gewisse Unabhängigkeit von jenen hat. Diese Bedingungsgleichung liefert das Optimum $i_{B,opt}$ des Meßstromes; dies hat, wie experimentell festgestellt ist von K. E. F. Schmidt (diese Zeitschr. 7, 642 f. 1906), einen endlichen Wert, so daß für größere Werte von i_B (noch vor dem Glühen des Drahtes) die Empfindlichkeit wieder abnimmt. Auch das zeigt die theoretische Betrachtung. Aus (2) a folgt sofort:

$$(5)\quad \frac{d^2 W_B}{d i_B^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{W_B}\left(\frac{d W_B}{d i_B}\right)^2 - \frac{1}{i_B}\,\frac{d W_B}{d i_B},$$

was man graphisch (aus der gegebenen Charakteristik) leicht nach i_B auflösen kann, zumal man statt W_B überall auch schreiben kann: $E(i_B)$.

Halle a. Saale, Dezember 1908.

(Eingegangen 26. September 1909.)

Zur experimentellen Entscheidung zwischen Ätherwellen- und Lichtquantenhypothese. I. Röntgenstrahlung.

Von J. Stark.

1. Stellung des allgemeinen Problems.

Wohl ziemlich allgemein herrscht die Ansicht, daß wenn ein einzelnes Elektron infolge

einer Beschleunigung zum Ausgangspunkt einer Strahlung wird, nach allen Richtungen eine Welle emittiert wird, deren Energiedichte in größeren Abständen von dem Emissionszentrum (einzelnes Elektron) in allen Emissionsrichtungen gleich groß ist. Ich habe bereits an einer anderen Stelle[1]) dargelegt, daß diese Ansicht eine Hypothese (Ätherwellenhypothese) ist und eine Extrapolation von der Erfahrung der raumzeitlichen Superposition der Emission vieler Elektronen auf den elementaren Vorgang der Emission durch ein einzelnes Elektron darstellt.

Eine andere Auffassung von dem elementaren Vorgang der Emission von Strahlung durch ein einzelnes Elektron haben wir aus der Lichtquantenhypothese zu folgern. Nach dieser breitet sich die von einem einzelnen Elektron weggehende elektromagnetische Strahlung nicht auf einen proportional mit dem Quadrat des Abstandes vom Emissionszentrum wachsenden Raum aus, sondern bleibt unabhängig von diesem Abstand auf ein endliches Volumen konzentriert und pflanzt sich nicht in allen Richtungen, sondern nur in einer Richtung vom Emissionszentrum fort, und zwar können wir als Fortpflanzungsrichtung eines Strahlungsquantums die Richtung definieren, in welcher sich der Schwerpunkt der Strahlungsenergie innerhalb des von ihr erfüllten Volumens bewegt.

Der Unterschied zwischen der Ätherwellen- und der Lichtquantenhypothese in der Auffassung des elementaren Vorganges der Emission läßt sich besonders scharf mit Hilfe der elektromagnetischen Bewegungsgröße[2]) formulieren. Es sei $\mathfrak{E}$ der elektrische, $\mathfrak{H}$ der magnetische Feldvektor, $\mathfrak{S}$ der Strahlvektor; als Dichte der elektromagnetischen Bewegungsgröße wird dann die Größe $\mathfrak{g} = \frac{1}{c^2}\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi c}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ definiert, wo c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Das Integral $\int \mathfrak{g}\, dv$, ausgedehnt über eine Kugel, in deren Zentrum das emittierende Elektron liegt und deren Fläche die ganze von diesem emittierte Strahlung umschließt, stellt die gesamte emittierte elektromagnetische Bewegungsgröße dar.

Nach der Ätherwellenhypothese ist auch im elementaren Vorgang der Emission die gesamte elektromagnetische Bewegungsgröße Null, ebenso ist während der Emission durch das Elektron die gesamte Kraft auf dieses, nämlich $\frac{d}{dt}\int \mathfrak{g}\, dv$, Null. Und kommt nach dieser Hypothese dadurch Beschleunigung zustande, daß das emissionsfähige Elektron mit einem anderen materiellen Teilchen zusammenstößt, dann bleibt nach ihr die Summe der mechanischen Bewegungsgrößen ($m_1 v_1 + m_2 v_2 = \text{const}$) konstant, eine Transformation von mechanischer und elektromagnetischer Bewegungsgröße ineinander ist nicht möglich.

Anders lauten in dieser Hinsicht die Folgerungen der Lichtquantenhypothese. Nach ihr ist die gesamte von einem beschleunigten Elektron weggehende elektromagnetische Bewegungsgröße von Null verschieden und zwar ist ihr absoluter Wert gegeben durch $\frac{h \cdot n}{c}$, wo h das Plancksche Wirkungselement, n die Frequenz bezeichnet; ihre Richtung ist gegeben durch die Bewegungsrichtung des Schwerpunktes des Strahlungsquantums. Demgemäß ist auch während der Emission durch das Elektron die gesamte Kraft auf dieses von Null verschieden; während der Emission üben das Elektron und das von ihm weggehende Strahlungsquantum eine ponderomotorische Wirkung aufeinander aus, und zwar ist hierbei die Kraft, welche das Elektron auf das Strahlungsquantum ausübt, gleich der Gegenkraft, welche es von dessen Seite erfährt. Ist bei einem Zusammenstoß des Elektrons die mit ihm verbundene mechanische Bewegungsgröße $m_1 v_1$, die Bewegungsgröße des gestoßenen Teilchens $m_2 v_2$ vor dem Stoß, sind die mechanischen Bewegungsgrößen nach dem Stoße $m_1 v_1'$, bez. $m_2 v_2'$ und ist die während des Stoßes emittierte elektromagnetische Bewegungsgröße $\frac{h n}{c^2} \mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{c}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schwerpunktes ist, dann gilt gemäß dem Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße die Gleichung

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' + \frac{h n}{c^2} \mathfrak{c}.$$

Verläuft dieser elementare Vorgang im Sinne dieser Gleichung von links nach rechts, so wird mechanische in elektromagnetische Bewegungsgröße transformiert, verläuft der Vorgang im Sinne der Gleichung von rechts nach links, dann wird elektromagnetische in mechanische Bewegungsgröße transformiert.

Bei den Lichtquellen (Flamme, Lichtbogen, Funke, glühender Körper), welche bis jetzt Gegenstand der experimentellen Untersuchung waren und von deren Emissionseigenschaften auf die Emission durch ein elementares Zentrum in der Ätherwellenhypothese extrapoliert wird, kommen durchschnittlich gleich viele atomistische mechanische Bewegungsgrößen von gleicher Größe in allen Richtungen vor; die über einen größeren Teil der Lichtquelle ausgedehnte Summe $\Sigma m v$ ist darum bei ihnen durchschnittlich Null und darum im Durchschnitt auch die gesamte elektromagnetische Größe $\int \mathfrak{g}\, dv$ dieses Teiles der Lichtquelle, es wird also nach allen

1) J. Stark, diese Zeitschr. **10**, 585, 1909.
2) Vergl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität II, S. 23.

Richtungen durchschnittlich gleich viel Strahlung von gleicher Frequenz emittiert.

Es ist möglich, daß wir später Mittel finden werden, die Strahlung eines einzelnen Elektrons für sich isoliert zu beobachten und so unmittelbar an der Erfahrung die obigen Folgerungen aus den zwei miteinander konkurrierenden Hypothesen zu prüfen. Vorderhand ist es uns aber wegen der Kleinheit der dabei ins Spiel tretenden Energiemengen nicht möglich. Indes können wir in Annäherung an den geordneten elementaren Vorgang Versuche anstellen auf Grund folgender Überlegung.

Wir erteilen einer großen Anzahl z von Elektronen eine mechanische Bewegungsgröße in derselben Richtung, nehmen z. B. ein Bündel Kathoden- oder Kanalstrahlen und lassen sie mit materiellen Teilchen zusammenstoßen; es erfahren dann zwar nicht alle Elektronen dieselbe Beschleunigung nach Richtung und Größe, es kommt vielmehr eine große Anzahl verschieden großer und verschieden gerichteter Beschleunigungen vor. Sind die von dem einfallenden Bündel mechanischer Bewegungsgröße gestoßenen Teilchen im Durchschnitt symmetrisch um die Achse des Bündels verteilt, wie im folgenden immer vorausgesetzt sei, dann ist aus Gründen der Symmetrie die Achse des Bündels eine Symmetrieachse für die Verteilung der vorkommenden Beschleunigungen beim Stoß, es kommt also in allen Richtungen, welche den gleichen Winkel mit der Achse des Bündels bilden, durchschnittlich die gleiche Anzahl von gleich großen Beschleunigungen der stoßenden Teilchen vor. Was die Verteilung der Beschleunigungen in bezug auf die Ebene durch den Mittelpunkt des Herdes der Stöße senkrecht zur Achse des einfallenden Bündels mechanischer Bewegungsgröße betrifft, so ist wohl der Fall (Symmetriefall) möglich, daß sie für die Verteilung der Beschleunigungen eine Symmetrieebene ist, daß also in Richtungen, welche einen gleich großen spitzen Winkel mit jener Ebene („Normalebene") bilden, gleich viele gleich große Beschleunigungen vorkommen. Es ist aber auch der Fall (Dissymmetriefall) möglich, daß in Richtungen von bestimmtem spitzem Winkel auf der Vorderseite der Normalebene (Seite des einfallenden Bündels) eine Anzahl von Beschleunigungen liegt, welche verschieden ist von der Anzahl gleich großer Beschleunigungen, die auf der Hinterseite der Ebene liegen und gleichen Winkel mit ihr bilden. In diesem Dissymmetriefall ist also die gerichtete oder geordnete Verteilung der mechanischen Bewegungsgrößen bis zu einem gewissen Maße auch nach den ersten Zusammenstößen der einzelnen Teilchen erhalten.

Für den vorstehenden Fall, daß ein Bündel von Elektronen, welche eine gleich große und gleich gerichtete Bewegungsgröße besitzen, durch Zusammenstoß mit materiellen Teilchen zur Emission von elektromagnetischer Strahlung veranlaßt wird, lassen sich leicht die Konsequenzen aus der Ätherwellen- und der Lichtquantenhypothese ziehen. Im Symmetriefalle ist gemäß beiden Hypothesen die Intensität der vom Stoßherd weggehenden Strahlung für alle Emissionsrichtungen gleich. Gemäß der Ätherwellenhypothese ist auch im Dissymmetriefalle die Strahlung in allen Emissionsrichtungen von gleich großer Intensität und gleicher Frequenz; dagegen ist in diesem Falle gemäß der Lichtquantenhypothese die Strahlung dissymmetrisch in bezug auf die Normalebene sowohl hinsichtlich der Intensität als auch der Frequenz, indem die Intensitäten und Frequenzen der Strahlung in Richtungen verschieden groß sind, welche gleiche Neigung zur Normalebene haben, aber auf verschiedenen Seiten liegen. Es sei z die Anzahl der elementaren einfallenden Bewegungsgrößen, es gilt dann nach der Ätherwellenhypothese auch im Dissymmetriefalle:

$$z m_1 \mathfrak{v}_1 + \Sigma m_2 \mathfrak{v}_2 = \Sigma m_1 \mathfrak{v}_1' + \Sigma m_2 \mathfrak{v}_2'$$

oder da $\Sigma m_2 \mathfrak{v}_2 = 0$ gesetzt werden darf: $z m_1 \mathfrak{v}_1 = \Sigma m_1 \mathfrak{v}_1' + \Sigma m_2 \mathfrak{v}_2'$ und außerdem $\int \mathfrak{g}\, d v = 0$.

Nach der Lichtquantenhypothese gilt im Dissymmetriefalle:

$$z m_1 \mathfrak{v}_1 = \Sigma m_1 \mathfrak{v}_1' + \Sigma m_2 \mathfrak{v}_2' + \Sigma \frac{h n}{c^2} c$$

und

$$\int \mathfrak{g}\, d v = \Sigma \frac{h n}{c^2} c > 0.$$

2. Das spezielle Problem der Erzeugung von Röntgenstrahlen durch ein Bündel Kathodenstrahlen, störende Nebenwirkungen.

Die einzelnen Elektronen eines Kathodenstrahlbündels mögen alle eine gleich große und gleich gerichtete Geschwindigkeit besitzen; sie sollen normal auf eine dünne Platte eines festen Körpers auffallen. Die einzelnen Elektronen des Bündels erfahren dann an verschiedenen Teilchen des festen Körpers durch die wechselseitigen Kräfte beim Zusammenstoß nach verschiedenen Richtungen verschiedene Beschleunigungen; wir fixieren zunächst die Betrachtung auf die Geschwindigkeitsverteilung unmittelbar nach den ersten Zusammenstößen der einzelnen Kathodenstrahlelektronen. In Fig. 1 sind für diese Spezialisierung schematisch die möglichen Ablenkungen der Kathodenstrahlelektronen dargestellt, die Größe und Richtung der Pfeile gibt die Größe und Richtung ihrer Geschwindigkeit und somit ihrer Bewegungsgröße vor und nach dem ersten Zusammenstoß an. In

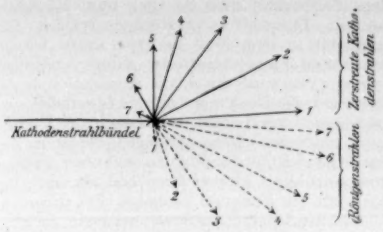


Fig. 1.

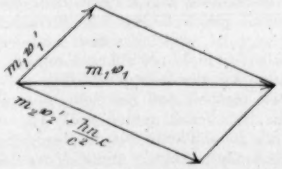


Fig. 2.

Fig. 2 ist für einen Fall von Beschleunigung das Vektorenparallelogramm der mechanischen Bewegungsgrößen und der elektromagnetischen Bewegungsgröße des emittierten Strahlungsquantums nach dem Stoße dargestellt, wobei der Einfachheit halber angenommen ist, daß die mechanische Bewegungsgröße des gestoßenen Teilchens vor dem Stoß relativ zu $m_1 v_1$ Null ist. Der Umstand, daß wir über die Bewegungsgröße $m_2 v_2$ des gestoßenen Teilchens nichts wissen, steht der weiteren exakten Diskussion des Phänomens im Wege; wir müssen uns zunächst mit einer Annäherung begnügen, indem wir uns auf die Diskussion des Falles beschränken, daß die mechanische Bewegungsgröße $m_2 v_2$ klein relativ zu $\frac{h\nu}{c^2} c$ ist. Für diesen Spezialfall sind in Fig. 1 in Gestalt gestrichelter Geraden die Richtungen eingezeichnet, in welchen infolge der Beschleunigung der Elektronen beim Stoß Strahlungsquanten emittiert werden; deren Bewegungsgröße ist proportional der Größe der eingezeichneten Pfeile. Die räumliche Verteilung der Strahlung wird erhalten durch Rotation der unteren Halbebene um die Achse der einfallenden Kathodenstrahlen. Auf den ersten Blick springt bei Betrachtung der Fig. 1 in die Augen, daß in dem idealisierten Spezialfall der Emission von Röntgenstrahlen durch Zerstreuung eines Kathodenstrahlbündels die Verteilung der Emission gemäß der Lichtquantenhypothese dissymmetrisch ist in bezug auf die Ebene (Normalebene) durch den Mittelpunkt des Stoßherdes normal zur Richtung des einfallenden Strahlenbündels; es wird wohl in der Richtung, aber nicht entgegengesetzt der Richtung des einfallenden Kathodenstrahlbündels Röntgenstrahlung emittiert.

Ferner ergibt sich auf Grund der Lichtquantenhypothese noch folgende spezielle Konsequenz für den idealisierten Spezialfall der Emission von Röntgenstrahlen. Für verschieden große Beschleunigungen ist der absolute Wert $\frac{h\nu}{c}$ der emittierten elektromagnetischen Bewegungsgröße verschieden groß. Da h und c Konstanten sind, so ergibt sich, daß nach verschiedenen Richtungen Röntgenquanten von verschiedener Frequenz, also von verschiedener Absorbierbarkeit bezogen auf das gleiche Material emittiert werden. Die Intensität J_ν der Röntgenstrahlung einer bestimmten Frequenz ist demnach eine Funktion des Winkels α zwischen der Emissionsrichtung und der Richtung des einfallenden Kathodenstrahlbündels, der Frequenz ν und offenbar auch der Geschwindigkeit v_1 des einfallenden Kathodenstrahlbündels; es ist also zu setzen $J_\nu = z f(\alpha, \nu, v_1)$.

Der eben diskutierte Idealfall der Emission von Röntgenstrahlen wird nun in der Wirklichkeit durch Nebenwirkungen beträchtlich modifiziert. Als erste Nebenwirkung ist die Erscheinung ins Auge zu fassen, daß neben der elektromagnetischen Bewegungsgröße des emittierten Röntgenstrahls im allgemeinen gleichzeitig mechanische Bewegungsgröße an dem gestoßenen Teilchen entsteht. Daraus resultiert zwar eine Modifikation der Funktion $f(\alpha, \nu, v_1)$, indes kann diese Nebenwirkung die oben charakterisierte Dissymmetrie in der Verteilung der Intensität der Röntgenstrahlen nicht völlig verwischen.

Als zweite modifizierende Nebenwirkung kommt in Betracht, daß die einzelnen Elektronen durch den ersten Zusammenstoß im allgemeinen nicht so viel Bewegungsgröße verlieren, daß sie in weiteren Zusammenstößen keine Röntgenstrahlen mehr zu emittieren vermögen. Vielmehr ist der Fall möglich, daß die seitlich oder sogar entgegengesetzt ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkten Kathodenstrahlen bei weiteren Zusammenstößen seitlich und entgegengesetzt der Richtung des einfallenden parallelen Kathodenstrahlbündels Röntgenstrahlen in anderer Richtung als in dem Idealfall emittieren. Diese Röntgenstrahlung von seiten der zerstreuten Kathodenstrahlen kann die Dissymmetrie der Röntgenstrahlung von seiten der primären Strahlen, wenn auch nicht aufheben, so doch unter Umständen beträchtlich verkleinern.

Eine dritte Nebenwirkung kann sich in der Emission von Eigenstrahlung großer Frequenz

von seiten der Atome geltend machen, welche von den primären oder zerstreuten Kathodenstrahlen getroffen werden. Wie ich bereits an früherer Stelle[1]) dargelegt habe, können die Atome der chemischen Elemente durch Kathodenstrahlen oder Röntgenstrahlen zur Fluoreszenz in großen Eigenfrequenzen angeregt werden. Aus der Unordnung zahlreicher elementarer Fluoreszenzemissionen ergibt sich dann, daß die durch Fluoreszenz von einem Körper ausgesandte Röntgenstrahlung nach allen Richtungen von dem Stoßherd (Antikathode) weg durchschnittlich gleich intensiv ist. Diese Fluoreszenzemission der Röntgenstrahlung vermag offenbar die Dissymmetrie der Emission des Idealfalles zwar nicht ganz aufzuheben, sie wird indes das Verhältnis der Intensitäten in und entgegengesetzt der Richtung der Kathodenstrahlen um so kleiner machen, je intensiver sie relativ zur Stoßemission von seiten der primären Kathodenstrahlen ist. Aus den Erfahrungen über die Polarisation der Röntgenstrahlung ist zu schließen, daß die Röntgenstrahlung einer Antikathode aus einem Element von großem Atomgewicht (z. B. Platin) überwiegend Fluoreszenzstrahlung ist. Daraus erklärt sich wohl, daß Röntgen[2]) und Walter[3]) an Antikathoden aus Platin eine Abhängigkeit der Intensität der Röntgenstrahlung von der Emissionsrichtung nicht auffinden konnten. Auch ich erhielt, wie vorweg bemerkt sei, von einer gewöhnlichen Röntgenröhre auf der Vorderseite der Antikathode in allen Emissionsrichtungen gleich große Intensität; die Beobachtung der Intensität erfolgte hierbei in derselben Weise und mit derselben Kassette wie die photographische Aufnahme der Strahlung einer Antikathode aus Holzkohle.

Als störende Nebenwirkung ist endlich die Absorption der Röntgenstrahlung auf ihrem Wege von der Antikathode bis zum Orte der Beobachtung in Betracht zu ziehen. Indem man die Antikathode im Zentrum einer kugelförmigen Röhre von überall gleicher Wandstärke anordnet, erreicht man, daß in allen Emissionsrichtungen die Röntgenstrahlen eine gleich dicke Glasschicht zu durchlaufen haben. Die Röntgenstrahlen gleicher Frequenz werden darum durch Absorption in der Glaswand um den gleichen Bruchteil geschwächt, Röntgenstrahlen verschiedener Frequenz dagegen um einen verschieden großen Bruchteil, und zwar die Strahlen großer Frequenz um weniger als die Strahlen kleiner Frequenz. Würde man streng nur in einer Frequenz beobachten, so würde die Dissymmetrie in der Intensität durch die Absorption in der Glaswand nicht geändert werden. Beobachtet man dagegen ohne Rücksicht auf die Frequenz der Röntgenstrahlen ihre Intensität in dem Maß der von ihnen hervorgebrachten Fluoreszenz oder photographischen Wirkung, so wird durch die Absorption in der Glaswand die Dissymmetrie des Idealfalles vergrößert bez. verkleinert, wenn nach der Vorderseite der Normalebene (entgegengesetzt zu den einfallenden Kathodenstrahlen) mehr bez. weniger Röntgenstrahlen kleiner Frequenz als nach der Rückseite zur Emission kommen. Bei ursprünglich vorhandener Emissionssymmetrie in allen vorkommenden Frequenzen kann dagegen durch die Absorption in der Glaswand keine Dissymmetrie geschaffen werden.

Was oben über den Einfluß der Absorption einer überall gleich dicken kugelförmigen Glaswand gesagt ist, gilt allgemein von jeder absorbierenden Schicht zwischen Emissions- und Beobachtungsort der Röntgenstrahlung; Voraussetzung ist hierbei, daß die Schicht (z. B. Aluminiumblech) überall gleich dick ist und die Form einer Kugelfläche hat, in deren Zentrum der Emissionsort liegt. Diese Voraussetzung ist indes bei den gewöhnlichen Röntgenröhren, was die gleichmäßige Dicke der Glaswand betrifft, nicht erfüllt. Herr Pohl machte mich auf eine Arbeit von Walter (a. a. O.) aufmerksam, in der gezeigt wird, daß bei den gewöhnlichen Röntgenröhren die Dicke der Glaswand in der Nähe des Ansatzrohres, welches die Kathode enthält, beträchtlich größer sein kann als auf der entgegengesetzten Seite der Röhre. Obwohl die von mir bei den nachstehenden Versuchen verwandte Röhre sorgfältig ausgesucht war, zeigte sich auch bei ihr eine Variation der Dicke der Glaswand in der Ebene durch die Richtung der Kathodenstrahlen, in welcher photographisch beobachtet wurde; die Bedingung, daß der Schnitt dieser Ebene mit der oberen Röhrenhälfte kreisförmig sei, war allerdings streng erfüllt. Die Variation der Dicke der Glaswand in dieser Ebene ist aus der nachstehenden Tabelle zu ersehen. Die Emissions-

Tabelle I.

Winkel	Glasdicke mm	Winkel	Glasdicke mm
−68°	1,68	−10°	0,92
−59	1,50	0	0,85
−52	1,32	+11	0,81
−42	1,20	+22	0,82
−35	1,11	+35	0,87
−30	1,11	+48	0,93
−21	1,08	+65	0,95
−16	1,00	+82	0,94

winkel sind gegen die Normalebene gerechnet, und zwar sind die Winkel auf der Vorderseite dieser Ebene mit negativem, diejenigen auf der Rückseite mit positivem Vorzeichen eingetragen.

1) J. Stark, diese Zeitschr. **10**, 579, 1909.
2) W. C. Röntgen, Wied. Ann. **64**, 21, 1898.
3) Walter, Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstrahl. 11, 1907.

Kennt man außer der Variation der Dicke a der absorbierenden Schicht ihren Absorptionsindex $\varkappa$ (cm^{-1}), für eine Röntgenstrahlenart, so läßt sich die beobachtete Intensität ($\mathcal{J}$) der Röntgenstrahlung auf die Intensität $\mathcal{J}_0$ für eine überall gleiche Dicke (a_0) korrigieren. Es ist nämlich $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} e^{\varkappa(a-a_0)}$. Diese Korrektion habe ich an den Beobachtungen der Intensität außerhalb der Röntgenröhre vorgenommen. Wie man unten sehen wird, ist allerdings durch sie die direkt beobachtete Variation der Röntgenstrahlung mit der Emissionsrichtung nicht wesentlich verändert worden. Dies geht auch aus dem Vergleich mit den Aufnahmen hervor, bei welchen der Einfluß der Glasabsorption dadurch ausgeschaltet war, daß die photographische Beobachtung der Röntgenstrahlung im Innern der Röntgenröhre selbst erfolgte.

Wichtiger als die Absorption in der Glaswand ist die Absorption der Röntgenstrahlen auf dem Wege, den sie in der Antikathode selbst vom Emissionszentrum weg nach dem Beobachtungsort zurückzulegen haben. Da die in der Röntgenröhre zur Verwendung gelangenden Kathodenstrahlen schon in sehr dünner Schicht nahezu vollkommen absorbiert bez. zerstreut werden, so liegt der Stoßherd der Kathodenstrahlen und somit der Emissionsort der Röntgenstrahlen in der obersten Schicht der Antikathode. Die Antikathode sei eine planparallele Kreisscheibe von der Dicke a, in deren Zentrum auf der Vorderseite das Kathodenstrahlbündel auffällt; die Dicke des Stoßherdes sei Δa; der Winkel der Emissionsrichtung mit der Ebene normal zur Richtung des Kathodenstrahlbündels sei α; die ungeschwächte Intensität der Röntgenstrahlung sei $\mathcal{J}_0$. Wegen der Kleinheit von $\varkappa \Delta a$ können wir dann in der Winkelöffnung von $-\frac{\pi}{2}$ bis $-\delta\alpha$, wo $\delta\alpha$ bei Kleinheit von $\varkappa$ ein sehr kleiner Winkel ist, die Absorption der Röntgenstrahlung vernachlässigen. Von $-\delta\alpha$ bis 0 fällt indes die Intensität abrupt von $\mathcal{J}_0$ auf $\mathcal{J}_0 e^{-\varkappa r}$, wo r der Radius der kreisförmigen, zentral angeordneten Antikathode ist. In der Winkelöffnung von 0 bis $\alpha_r = \text{arc tang}\,\frac{a}{d}$ gilt bei kleinem Wert von $\frac{a}{d}$ mit großer Annäherung $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 e^{-\varkappa r}$. In der Winkelöffnung von α_r bis $+\frac{\pi}{2}$ gilt

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 e^{-\frac{\varkappa(a-\Delta a)}{\sin\alpha}}$$

oder, wenn Δa klein ist gegen a

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 e^{-\frac{\varkappa a}{\sin\alpha}}.$$

Das Verhältnis der Intensitäten der Röntgenstrahlung in zwei symmetrisch zur Normalebene gelegenen Emissionsrichtungen $-\alpha$ und $+\alpha$ ist demnach $\frac{\mathcal{J}_{(+\alpha)}}{\mathcal{J}_{(-\alpha)}} = \frac{\mathcal{J}_{0(+\alpha)}}{\mathcal{J}_{0(-\alpha)}} e^{-\frac{\varkappa a}{\sin\alpha}}$; ist das Verhältnis $\frac{\mathcal{J}_{0(+\alpha)}}{\mathcal{J}_{0(-\alpha)}}$ größer als 1, wie es die Quantenhypothese für den diskutierten Idealfall fordert, so wird diese Dissymmetrie gemäß obiger Relation durch die Absorption in der Antikathode verkleinert, kann je nach dem Wert von $\varkappa a$ aufgehoben oder sogar umgekehrt werden. In den gewöhnlichen Röntgenröhren ist $\varkappa a$ so groß, daß auf die Rückseite der Normalebene so gut wie keine Strahlung zu einem Beobachter gelangen kann.

3. Methoden.

Auf Grund der vorstehenden Erwägungen traf ich die Versuchsanordnung zur Aufsuchung einer dissymmetrischen Emission der Röntgenstrahlen. Das Wichtigste hierbei war, die Kathode aus einem Material zu wählen, welches die zwei letzten Nebenwirkungen nur beschränkt zur Entwicklung kommen läßt. Kohle aus Buchenholz schien mir in dieser Hinsicht am meisten geeignet. Denn auch wenn die aus ihr hergestellte Antikathode 2 mm dick ist, ist die Absorption der Röntgenstrahlen in ihr sowohl wegen ihres kleinen spez. Gewichtes als auch wegen des kleinen Atomgewichtes des Kohlenstoffs nicht groß. Weiter scheint gemäß der Interpretation, welche ich der Beobachtung Herwegs[1]) über die Polarisation der primären Röntgenstrahlen von einer Kohlenantikathode gab, die Fluoreszenzemission von Röntgenstrahlen bei Kohle nicht intensiv relativ zur Stoßemission zu sein. Endlich kann eine Kohlenantikathode an der Auftreffstelle der Kathodenstrahlen selbst bis zur Hellrotglut erhitzt werden, ohne zu schmelzen.

Die Kohlenantikathode hatte die Form einer planparallelen Kreisscheibe von 20 mm Durchmesser. In der ersten Versuchsreihe betrug die Dicke des inneren Teiles von 16 mm Durchmesser 1 mm, er war umgeben von einem konzentrischen Ring von 2 mm Breite und 2 mm Dicke. Die größere Dicke dieses Ringes war deswegen notwendig, weil in den Rand der Kohlenscheibe eine 1 mm tiefe Nute geschnitten werden mußte; in diese wurde ein 0,4 mm dicker Platindraht gelegt und straff angezogen, seine Enden wurden auf eine Länge von 25 mm umeinander gedreht, so daß die Kohlenscheibe am Rande in Platindraht gefaßt war und durch einen 25 mm langen Stil aus doppeltem Platindraht gehalten wurde. In Fig. 3 ist ein Normalschnitt durch die Kohlenantikathode und ihre Fassung dargestellt. Wie aus ihr zu ersehen ist, wurde der die Kohlenscheibe haltende

1) J. Herweg, Ann. d. Phys. **29**, 398, 1909.

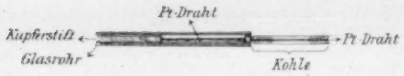


Fig. 3.

Platindraht in einem Kupferstift axial befestigt, dieser selbst wurde in ein eng anliegendes Glasrohr geschoben. In einer zweiten Versuchsreihe war die Kohlenscheibe gleichmäßig 2 mm dick, ihre Befestigung war die gleiche wie zuvor. Diese Form der Kohlenantikathode ist deswegen vorzuziehen, weil sie eine leichtere Berechnung der Absorption in der Kohle für verschiedene Emissionsrichtungen gestattet. Aus diesem Grunde habe ich hier nur die Messungen an Aufnahmen mitgeteilt, welche mit der gleichmäßig 2 mm dicken Kohlenscheibe erhalten wurden. Diese war so aus einem Stück Buchenkohle geschnitten, daß ihre Breitseite parallel den Schichten gleichen Wachstums war; die spez. Dichte der Kohle betrug 0,4 g/cm^{-3}.

Als Röntgenröhre diente eine kugelförmige Glasröhre von 6,5 cm Radius (Fig. 4). Aus

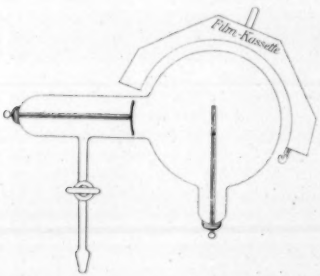


Fig. 4.

einer seitlichen Ansatzröhre (in der ersten Versuchsreihe ohne Schliff, in der zweiten mit Schliff) ragte der Träger der Kohlenantikathode so in die Röhre, daß die Mitte der Kohlenscheibe mit dem Zentrum der Röhre zusammenfiel. In normaler Stellung zur Kohlenscheibe und koaxial mit ihr war in einem zweiten Ansatzrohr eine konkave Aluminiumkathode von 29 mm linearer Öffnung angebracht.

Die Röhre wurde unter Zwischenschaltung eines Hahnes unter Vermeidung einer langen Rohrleitung zu dem Zwecke direkt auf eine Gaedepumpe gesetzt, um aus ihr auch bei niedrigem Druck rasch Gas abpumpen zu können. Die Gaedepumpe arbeitete vorzüglich, ihr Vorvakuum bediente eine zweistiefelige Pfeiffersche Ölpumpe. Es wurde die Röhre zunächst zwei Stunden lang evakuiert, während sie mit einem starken Strom eines großen Induktoriums so belastet wurde, daß sie warm wurde. Dann wurde für kurze Zeit das Induktorium abgestellt oder mit so schwachem Strome betrieben, daß die Pumpe mehr Gas wegschaffen konnte, als aus der Kohlenantikathode entwickelt wurde. Infolgedessen sank dann ziemlich rasch der Gasdruck, der Kathodendunkelraum verlängerte sich, der Querschnitt des Kathodenbündels zog sich auf wenige Quadratmillimeter zusammen, so daß die Kohlenscheibe die ganze auf ihrer Rückseite liegende Glashalbkugelfläche vor Kathodenstrahlen abschirmte. Dagegen zeigte bei weiter steigender Spannung die vordere Hälfte der Glaskugelfläche ziemlich helle Fluoreszenz unter dem Einfluß der an der Vorderfläche der Kohlenantikathode reflektierten Kathodenstrahlen in der scharfen Begrenzung, wie es bei der gewöhnlichen Röntgenröhre beobachtet wird. War dieser Zustand eingetreten, dann glühte die Kohlenscheibe auf ihrer Vorderseite in einer Ausdehnung von 1—3 mm^2 schwach dunkelrot, dann war auch mit Hilfe eines Fluoreszenzschirmes die Emission von Röntgenstrahlen festzustellen; der Hahn nach der Pumpe wurde dann zugedreht, und die Beobachtungen begannen. War durch Gasentwicklung aus der Kohle das Vakuum so schlecht geworden, daß die Emission von Röntgenstrahlen aufhörte, dann wurde der Hahn nach der Pumpe geöffnet, die Belastung der Röhre mit Strom verkleinert oder für kurze Zeit unterbrochen, bis die Röhre wieder so weit evakuiert war, daß sie Röntgenstrahlen lieferte.

Bei längerem Betrieb der Röhre wird die Kohlenscheibe an der Auftreffstelle der Kathodenstrahlen oberflächlich etwas rissig, besonders wenn sie stark belastet wurde. Durch einen Magneten kann man indes die Kathodenstrahlen etwas zur Seite lenken, so daß sie an einer unveränderten Stelle der Kohlenscheibe auffallen.

Bei den meisten Beobachtungen diente als Stromquelle ein großes Induktorium, das mit einem Quecksilberturbinenunterbrecher betrieben wurde. Vor die Röntgenröhre war eine ziemlich harte Ventilröhre gelegt, welche den Schließungsstrom im Sekundärkreis abschnitt. Eine Beobachtungsreihe wurde auch mit einer Influenzmaschine mit 20 Scheiben ausgeführt. Es ergab sich in den Beobachtungen kein Unterschied, mochte die Kathode geerdet oder nicht geerdet sein.

Zur Beobachtung der von den Röntgenstrahlen erregten Fluoreszenz diente ein Bariumplatinzyanürschirm. Dieser war in einer Breite von 3 cm, einer Länge von 25 cm aus einem gewöhnlichen Fluoreszenzschirm für Röntgenstrahlen geschnitten, zu einem Halbkreis ge-

bogen, auf einem Ausschnitt in undurchsichtiger Pappe befestigt; diese war auf einen Holzgestell montiert. Mit diesem wurde der Schirm konzentrisch vor die Röhre gerückt, so daß seine Mantelfläche vertikal stand. Die Röhre selbst war so aufgestellt, daß die Kathode horizontal, der Träger der Kohlenantikathode vertikal stand.

Zur photographischen Beobachtung der Emission der Röntgenstrahlen dienten Agfa-Planfilms von 3,9 cm Breite und 24,5 cm Länge. Sie wurden in eine kreisförmige Kassette aus Messingblech von 8 cm Radius (Fig. 5a) eingelegt, mit einem gleich großen Streifen schwarzen Papiers bedeckt und dann mit einem Rahmen (Fig. 5b) festgeklemmt, der einen

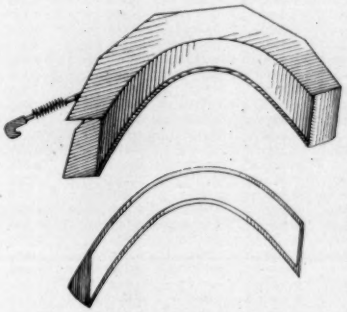


Fig. 5a und 5b.

2,8 cm breiten Ausschnitt besaß; der Rahmen wurde durch einen an einer Feder sitzenden Haken an dem einen Ende gegen ein vorspringendes Widerlager an der Kassette mit seinem anderen Ende festgedrückt. Zwischen Film und den Rahmen konnten gleich große Streifen von 0,4 mm dickem Aluminiumblech gelegt werden, die so mit Ausschnitten versehen waren, daß ein 10 mm breiter Streifen des Films nur mit schwarzem Papier, der folgende 10 mm breite Streifen außerdem noch mit einer Lage von 0,4 mm dickem Aluminiumblech, der folgende 10 mm breite Streifen mit zwei je 10 mm dicken Lagen Aluminiumblech bedeckt war. Die Filmkassette wurde, wie es aus Fig. 4 zu ersehen ist, konzentrisch mit der Röntgenröhre so aufgestellt, daß die Mittellinie des Kreiszylinder-Films in die Symmetrieebene der Röntgenröhre fiel; der Abstand des Films vom Mittelpunkt der Röhre betrug 8 cm. Die Expositionsdauer variierte zwischen 2 und 10 Minuten.

Zur Aufnahme der Intensität der Röntgenstrahlung innerhalb der Röhre selbst diente eine schmale kreisförmige Kassette aus Aluminiumblech von 6,1 cm Radius, 150° Winkelöffnung, 1,1 cm lichter Höhe und 0,15 cm lichter Tiefe. Ihr Normalschnitt ist in Fig. 6 dargestellt. Ein

Fig. 6.

1,1 cm breiter, 16,2 cm langer Filmstreifen wurde in dünnes, lichtdichtes, schwarzes Papier geschlagen, auf die Rückseite des Kassettenschiebers gepreßt und dann mit diesem zusammen in den Kassettenrahmen geschoben. Bei dieser Einrichtung der Kassette war die Vorderseite des Films außer durch schwarzes Papier in der Mitte auf eine Breite von 5 mm durch eine 0,4 mm dicke Aluminiumschicht, an den Rändern auf eine Breite von 4 bez. 2 mm durch eine 0,8 mm dicke Aluminiumschicht abgedeckt. Auf dem Film kam somit Röntgenstrahlung zur Beobachtung, welche eine 0,4 mm dicke Aluminiumschicht passiert hatte, und Röntgenstrahlung, welche durch eine doppelt so dicke Schicht gegangen war.

Die mit dem Film beschickte Aluminiumkassette wurde durch die Schlifföffnung in die Röntgenröhre eingeführt, symmetrisch in die Ebene durch Kathode und Stil der Antikathode gebracht. Darauf wurde die Röhre so, daß die Kassette unten lag, die Kohlenantikathode von oben her in die Röhre ragte, an die Pumpe gesetzt. Zwischen Pumpe und Röhre lag ein kleines Gefäß mit frischem Phosphorpentoxyd. Infolge davon, daß der Film im Innern der Röhre lange Zeit hindurch Wasserdampf abgab, dauerte es lange, bis der Druck in der Röhre so klein geworden war, daß die Röhre Röntgenstrahlen lieferte. Es mußte mindestens 7 Stunden lang gepumpt werden, bis die Röhre in diesem Zustand war. Auch dann wurde noch kein hohes Vakuum erzielt, es konnte also nur mit weichen Röntgenstrahlen für relativ kleinen Kathodenfall gearbeitet werden; um so mehr, als während des Vorpumpens die Röhre nicht mit Strom beschickt, also die Kohlenantikathode nicht entgast wurde. Ich wollte nämlich irgendwelche Wirkungen der Entladung auf den Film vor der Entwicklung der Röntgenstrahlung ausschließen.

In der Objektivität und in der Möglichkeit quantitativer Beobachtung liegt ein großer Vorzug der photographischen Methode gegenüber der Fluoreszenzmethode. Dagegen ist diese jener in der Kürze der Beobachtungsdauer überlegen. Ein Mangel beider Methoden liegt darin, daß sie nur ein rohes Maß für die Intensität der Röntgenstrahlen liefern und nicht eine

Differenzierung von Strahlen verschiedener Frequenz gestatten.

4. Beobachtungen.

Sowohl die Fluoreszenz- wie die photographische Methode lieferte von Anfang an und gleichmäßig deutlich in allen weiteren Beobachtungen das Resultat, daß die Verteilung der Intensität der Röntgenstrahlen dissymmetrisch ist in bezug auf die Ebene (Normalebene) durch den Stoßherd normal zur Richtung der einfallenden Kathodenstrahlen in der Weise, daß die Emission nach der Vorderseite dieser Ebene, also entgegengesetzt der Richtung der Kathodenstrahlen kleiner ist als nach der Rückseite dieser Ebene, also in der Richtung der Kathodenstrahlen.

Auf den ersten Blick fällt bei Betrachtung der außerhalb und innerhalb der Röhre erhaltenen Photogramme außer der Dissymmetrie der Schwärzung der bei dem Winkel Null die Photogramme normal durchziehende ungeschwärzte Streifen auf, der auf dem Fluoreszenzschirm einem dunklen Strich von äquivalenter Breite entsprach. Er stellt offenbar das Schattenbild des 0,4 mm dicken Platindrahtes dar, welcher die Kohlenscheibe am Rande umfaßte und sie hielt.

Weiter fällt an den Photogrammen, welche mit der gleichmäßig dicken Kohlenscheibe erhalten wurden, auf, daß die Schwärzung von der Seite der positiven Winkel her nach Überspringen des Platindrahtschattens sich zunächst in abnehmender Dichte in das Gebiet der negativen Winkel hinein fortsetzt, dann aber ziemlich rasch ansteigt, um darauf wieder abzunehmen.

Diese Partie geringerer Schwärzung zwischen dem Platindrahtschatten und dem raschen Anstieg der Schwärzung wird offenbar von denjenigen Röntgenstrahlen hervorgebracht, welche in dem Winkelfeld zwischen der Ebene der vorderen Kohlenoberfläche und der Kegelfläche verlaufen, deren Spitze in dem Stoßherd der Kathodenstrahlen liegt und deren Mantellinien den die Kohle umfassenden Platindraht berühren. Die Stelle des starken Anstieges der Schwärzung an der Grenze dieses Selbstschattens der Kohlenantikathode entspricht demnach der Emissionsrichtung $\alpha = 0$.

An drei der besten Aufnahmen wurden die Schwärzungen mit Hilfe des Hartmannschen Mikrophotometers bestimmt. In der Tabelle II sind die Messungen an einem Photogramm reproduziert, das mit der Messingkassette (Fig. 5) außerhalb der Röhre erhalten wurde; ein Drittel der Filmbreite war hierbei mit 0,4 mm dickem Aluminiumblech das zweite Drittel mit zwei Lagen von je

Tabelle II.

Marke cm (Radius 8 cm)	Schwärzg. unter 0,8 mm *Al*	Schwärzung unter 0,4 mm *Al*		Schwärzung ohne *Al*
	Beob. Schwärzg. S_b	Beob. Schwärzg. S_b	$S_r = S_b - 0{,}412$	Beob. Schwärzung S_b
1	0,405	0,455	0,043	0,603
1,5	0,455	0,474	0,062	0,665
2	0,430	0,512	0,100	0,747
2,5	0,487	0,535	0,123	0,763
3	0,491	0,585	0,173	0,870
3,5	0,488	0,612	0,200	0,927
4	0,496	0,650	0,238	1,000
4,5	0,535	0,710	0,298	1,046
5	0,547	0,710	0,298	1,101
5,5	0,575	0,739	0,327	1,125
6	0,580	0,756	0,344	1,131
6,6	0,592	0,774	0,352	1,177
7	0,602	0,820	0,408	1,200
7,5	0,642	0,909	0,497	1,240
8	0,684	0,964	0,552	1,307
8,5	0,715	0,999	0,587	1,397
7,75	0,708	1,030	0,618	1,413
9	0,721	0,998	0,586	1,372
9,25	0,637	0,833	0,421	1,227
9,5	0,642	0,899	0,487	1,238
9,75	0,665	0,908	0,496	1,194
10	0,425	0,412	0,000	0,589
10,25	0,375	0,600	0,188	0,971
10,5	0,624	0,903	0,491	1,274
10,75	0,680	0,967	0,555	1,320
11	0,694	0,970	0,558	1,318
11,25	0,733	0,990	0,578	1,357
11,5	0,767	1,015	0,603	1,400
12	0,772	1,046	0,634	1,465
12,5	0,776	1,063	0,652	1,479
13	0,845	1,086	0,674	1,496
13,5	0,796	1,065	0,653	1,503
14	0,740	1,083	0,671	1,516
14,5	0,748	1,078	0,656	1,540
15	0,773	1,078	0,666	1,522
15,5	0,729	1,065	0,653	1,506
16	0,755	1,044	0,632	1,480
16,5	0,740	1,050	0,638	1,485
17	0,735	1,035	0,623	1,490
17,5	0,604	1,020	0,608	1,434
18	0,725	1,000	0,588	1,426
18,5	0,739	1,998	0,586	1,398
19	0,718	1,003	0,591	1,409
19,5	0,678	1,005	0,593	1,417
20	0,635	0,979	0,567	

0,4 mm dickem Aluminiumblech bedeckt, das dritte, in der Mitte liegende Drittel war nur mit schwarzem Papier bedeckt. In der Tabelle III sind die Messungen an einem Photogramm wiedergegeben, welches im Innern der Röhre mit der oben beschriebenen schmalen Aluminiumkassette erhalten wurde.

In erster Annäherung darf man wohl die Annahme machen, daß die von Röntgenstrahlen in einer photographischen Schicht veranlaßte Schwärzung proportional der absorbierten Röntgenstrahlenenergie ist. Diese selbst ist freilich abhängig von der Art der Strahlung, sie ist unter sonst gleichen Umständen für weiche Röntgenstrahlen größer als für harte. Wir wollen indes zunächst von der Abhängigkeit der Schwärzung vom Absorptionsindex einer Röntgenstrahlenart absehen.

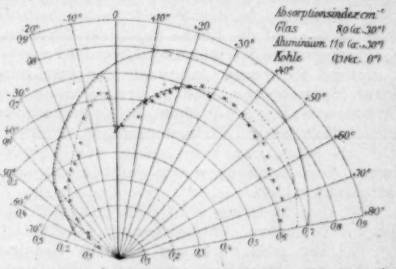
Tabelle III.

Marke cm (Radius 6,1 cm)	Schwärzung unter 0,8 mm *Al* Beob. Schwärzung S_b	$S_r = S_b - 1{,}050$	Schwärzung unter 0,4 mm *Al* Beob. Schwärzung S_b	$S_r = S_b - 1{,}100$
1	1,140	0,090	1,457	0,357
1,5	1,135	0,085	1,457	0,357
2	1,160	0,110	1,475	0,375
2,5	1,186	0,136	1,506	0,406
3	1,188	0,138	1,519	0,419
3,5	1,232	0,182	1,534	0,434
4	1,201	0,152	1,567	0,467
4,5	1,250	0,200	1,600	0,500
5	1,280	0,230	1,647	0,547
5,5	1,360	0,310	1,636	0,536
6	1,325	0,275	1,673	0,573
6,25	1,300	0,250	1,672	0,572
6,5	1,280	0,230	1,685	0,585
6,75	1,345	0,295	1,656	0,556
7	1,310	0,260	1,682	0,582
7,25	1,275	0,225	1,573	0,473
7,5	1,270	0,220	1,510	0,410
7,75	1,230	0,200	1,425	0,325
8	1,050	0,000	1,100	0,000
8,25	1,207	0,157	1,493	0,393
8,5	1,255	0,205	1,512	0,412
8,75	1,267	0,217	1,573	0,473
9	1,268	0,218	1,596	0,495
9,25	1,334	0,284	1,645	0,545
9,5	1,328	0,278	1,648	0,548
9,75	1,387	0,337	1,669	0,569
10	1,350	0,300	1,690	0,590
10,5	1,402	0,352	1,754	0,654
11	1,376	0,326	1,714	0,614
11,5	1,370	0,320	1,745	0,645
12	1,350	0,300	1,742	0,642
12,5	1,361	0,311	1,770	0,670
13	1,307	0,257	1,738	0,638
13,5	1,336	0,286	1,724	0,624
14	1,376	0,326	1,738	0,638

Die beobachtete Schwärzung (S_b) ist gleich der Summe aus der (reduzierten) Schwärzung (S_r) durch die Röntgenstrahlung und der Schwärzung infolge von Schleier oder diffuser Sekundärstrahlung zu setzen. Als Wert für die letztere Schwärzung nahm ich die geringste Schwärzung im Platindrahtschatten auf dem Photogramm an. Besonders die im Innern der Röhre erhaltenen Photogramme zeigten starken Schleier, wahrscheinlich infolge der scharfen Austrocknung.

Um die Schwärzungen der Tabelle II auf gleichmäßige Absorption in der Glaswand korrigieren zu können, bestimmte ich den Absorptionsindex für Glas, indem die in der Emissionsrichtung $\alpha = 30°$ liegende Partie des Films zum Teil mit 0,4 mm dickem Glas von derselben Herkunft wie die Röntgenröhre bedeckt und die Schwärzung einer bedeckten und einer unbedeckten Stelle ermittelt wurde. Das hierbei erhaltene Photogramm zeigte die gleiche Variation der Schwärzung wie das Photogramm der Tabelle II. Der Absorptionsindex des Glases ergab sich zu 8 cm^{-1}. Der Absorptionsindex der Kohle der Antikathode konnte aus jedem Photogramm selbst in folgender Weise ermittelt werden. Es bezeichne $S_{(-\delta_\alpha)}$ die maximale Schwärzung (reduziert) dicht neben der oben definierten Emissionsrichtung $\alpha = 0°$, $S_{(+\delta_\alpha)}$ die minimale Schwärzung dicht neben dieser Richtung, dann ist der Absorptionsindex der Antikathodekohle

$$\varkappa = \frac{\lg S_{(-\delta_\alpha)} - \lg S_{(+\delta_\alpha)}}{r \lg e}$$

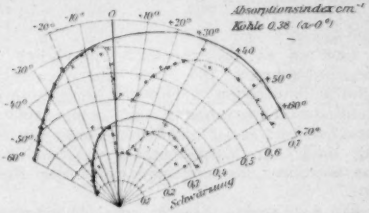


Aufnahme außerhalb der Röhre. Strahlung durch 0,81–1,50 mm Glas u. 0,4 mm Alum.
Schwärzungskurve ..... beobachtet, - - - Glasabsorpt. korrig., ——— Glas- u. Kohleabsorpt. korrig.

Fig. 7.

In Figur 7 sind die reduzierten Schwärzungen der Tabelle II für eine Lage Aluminiumblech in den ihnen zugehörigen Emissionsrichtungen graphisch eingetragen; neben der beobachteten Schwärzungskurve ist die Schwärzungskurve für gleichmäßige Glasabsorption (Glasdicke 0,81 mm) eingetragen und die Schwärzungskurve für gleichmäßige Absorption im Glas und für die Absorption Null in der Kohleantikathode.

In Fig. 8 sind in ähnlicher Weise die reduzierten Schwärzungen der Tabelle III dargestellt. Hier war lediglich die Korrektion auf die Absorption Null in der Kohleantikathode notwendig.



Aufnahme im Innern der Röhre. Strahlung durch 0,4 bez. 0,8 mm Alum.
Schwärzungskurven ..... beobachtet, ——— Kohleabsorpt. korrig.

Fig. 8.

Beim Vergleich der Figuren 7 und 8 fällt zunächst die Übereinstimmung sowohl der korrigierten wie der nichtkorrigierten Schwärzungskurven der zwei Photogramme auf, von denen das eine im Innern, das andere außerhalb der Röntgenröhre gewonnen wurde.

Die ausgezogenen (korrigierten) Schwärzungskurven der zwei Figuren lassen deutlich erkennen, daß die Intensität der Emission der Röntgenstrahlung, gemessen in photographischer Wirkung, in der Weise dissymmetrisch ist in bezug auf die Ebene durch den Stoßherd des erzeugenden Kathodenstrahlbündels normal zu dessen Richtung, daß nach der Rückseite dieser Normalebene, also in der Richtung der Kathodenstrahlen, an einer Kohleantikathode beträchtlich mehr Röntgenstrahlung emittiert wird als nach der Vorderseite der Normalebene, also entgegengesetzt der Richtung der Kathodenstrahlen.

Aus den Messungen an dem im Innern der Röhre erhaltenen Photogramm (Tabelle III, Fig. 8) läßt sich noch ein weiteres Resultat entnehmen. Berechnet man für eine jede Emissionsrichtung den Absorptionsindex für Aluminium von 0,4 auf 0,8 mm Dicke gemäß der Relation

$$\varkappa_{\alpha} = \frac{\lg S_{\alpha(0,4)} - \lg S_{\alpha(0,8)}}{0{,}04 \lg e},$$

so ergibt sich der Absorptionsindex als Funktion der Emissionsrichtung. Wie aus der Fig. 9

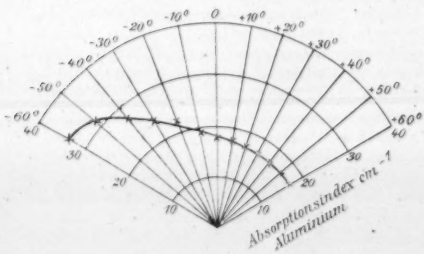


Fig. 9.

zu ersehen ist, besteht auch hinsichtlich des Absorptionsindex der von einer Kohleantikathode emittierten Röntgenstrahlung eine beträchtliche Dissymmetrie in bezug auf die Normalebene; es ist nämlich die Röntgenstrahlung nach der Vorderseite der Normalebene absorbierbarer als diejenige nach der Rückseite.

Es war meine Absicht, die Abhängigkeit der Intensität und des Absorptionsindex der Röntgenstrahlen von der Emissionsrichtung für beträchtlich voneinander verschiedene, während einer Aufnahme indes konstante Werte des Kathodenfalls zu untersuchen. Bei der benutzten Anordnung war mir dies indes noch nicht möglich, da der Gasdruck während der Aufnahme infolge von Gasentwicklung aus der Holzkohle in nicht zu beherrschender Weise schwankte.

5. Folgerungen.

Die vorstehenden Beobachtungen haben ergeben, daß die Emission von Röntgenstrahlen durch eine Kohlenantikathode in bezug auf die Normalebene dissymmetrisch ist sowohl hinsichtlich der Intensität als auch des Absorptionsindex. Es ist möglich, daß dies Resultat durch eine Fehlerquelle vorgetäuscht ist, welche mir entgangen ist; und ich möchte diejenigen, welche das Hereinspielen einer bestimmten Fehlerquelle vermuten, bitten, mich darauf aufmerksam zu machen, damit ich sie bei weiteren Versuchen mit verbesserten Mitteln berücksichtigen kann.

Hält man die Dissymmetrie der Emission von Röntgenstrahlen durch ein Kathodenstrahlbündel experimentell für sichergestellt, so sind aus diesem Phänomen in theoretischer Hinsicht verschiedene Folgerungen zu ziehen. Freilich kann man ihm gegenüber einer Entscheidung zwischen Ätherwellen- und Lichtquantenhypothese ausweichen, indem man erklärt, mit der Röntgenstrahlung sei es eine eigene Sache, es sei fraglich, ob sie eine polarisierbare elektromagnetische Strahlung von Lichtgeschwindigkeit oder ob sie eine korpuskulare Strahlung, etwa gemäß der Braggschen Hypothese eine Strahlung von neutralen Paaren (positives und negatives Elektron) sei.

Stellt man sich indes auf den Standpunkt, daß die Röntgenstrahlung eine elektromagnetische Strahlung ist, welche sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und polarisierbar ist, dann ist man durch zwei Tatsachen vor die Entscheidung zwischen der Ätherwellen- und die Lichtquantenhypothese gestellt. Die eine Tatsache ist, daß ein Kathodenstrahlbündel, wenn seine Elektronen durch Zusammenstoß zur Änderung ihrer mechanischen Bewegungsgröße gezwungen sind, nicht nach allen Richtungen Röntgenstrahlung gleicher Intensität und gleicher Absorbierkeit zur Emission bringt, sondern nach der Rückseite der Normalebene Strahlen größerer Intensität und kleinerer Absorbierbarkeit als in entgegengesetzter Richtung. Die zweite Tatsache[1]), auf deren Bedeutung für die Strahlungstheorie[2]) vor einiger Zeit von mir aufmerksam gemacht wurde, ist die Erscheinung, daß Röntgenstrahlen auch in großen

1) E. Dorn, Abh. d. Naturf.-Ges. Halle **22**, 39, 1900; A. Bestelmeyer, C. R. **130**, 1013, 1907.
2) J. Stark, diese Zeitschr. **10**, 579, 1909.

Abständen von ihrem Emissionszentrum Kathodenstrahlen zur Emission bringen, deren Energie von der Ordnung der Energie des einzelnen primären Kathodenstrahlelektrons ist, welches für sich einzeln Röntgenstrahlung emittiert. Beide Tatsachen sind wohl kaum mit Hilfe der Ätherwellenhypothese zu deuten, wohl aber mit Hilfe der Lichtquantenhypothese, nämlich mit der Hypothese, daß die elektromagnetische Strahlungsenergie nicht gleichmäßig nach allen Richtungen in dem hypothetischen Medium Äther sich ausbreitet, sondern auf ein endliches Volumen um ihren mit Lichtgeschwindigkeit sich bewegenden Schwerpunkt konzentriert bleibt.

Wenn man die Dissymmetrie der Emission von Röntgenstrahlen in bezug auf die Normalebene hinsichtlich der Intensität und der Absorbierbarkeit für erwiesen hält, liegt es nahe nach verwandten Phänomenen zu suchen.

Die Umkehrung des Phänomens der Emission von Röntgenstrahlen durch Kathodenstrahlen ist die Emission sekundärer Kathodenstrahlen durch Absorption von Röntgenstrahlen. Es ist zu vermuten, daß, wenn Röntgenstrahlen in einer dünnen Platte eines Körpers absorbiert werden, auf der Rückseite der Normalebene (Ebene durch Absorptionsherd normal zur Einfallsrichtung der Röntgenstrahlen) mehr sekundäre Kathodenstrahlen austreten als auf der Vorderseite[1]). Ferner dürften die nach der Vorderseite emittierten Kathodenstrahlen durchschnittlich eine kleinere Geschwindigkeit haben als die nach der Rückseite emittierten Kathodenstrahlen.

Die β-Strahlen der Radioelemente sind schnelle Kathodenstrahlen, die γ-Strahlen wahrscheinlich Röntgenstrahlen großer Frequenz. Gemäß Analogie ist zu folgern, daß die β-Strahlen bei ihrem Auftreffen auf die Atome eines festen Körpers sehr wenig γ-Strahlen entgegengesetzt ihrer Richtung, wohl aber merkliche γ-Strahlung nach der Rückseite der Normalebene zur Emission bringen. Umgekehrt dürften die γ-Strahlen der Radioelemente bei ihrer Absorption in festen Körpern mehr und schnellere sekundäre β-Strahlen in als entgegengesetzt ihrer Richtung zur Emission bringen.

In einer besonderen Untersuchung soll die hier auf Grund der Lichtquantenhypothese entwickelte Theorie der Emission von elektromagnetischer Bewegungsgröße infolge des Stoßes von Elektronen angewendet werden auf die Lichtemission im Wellenlängengebiete 450—250 $\mu\mu$.

1) Die obige Folgerung haben die Herren Meyer und Steubing aus meinen Beobachtungen gezogen und experimentell zu prüfen unternommen.

Aachen, Technische Hochschule, 5. November 1909.

(Eingegangen 16. November 1909.)

Absorption, Fluoreszenz und magnetische Drehung des Natriumdampfes im Ultraviolett. (The Ultra-violet Absorption, Fluorescence and Magnetic Rotation of Sodium Vapour[1]).

Von R. W. Wood.

Die vorliegende Arbeit behandelt die optischen Eigenschaften des Natriumdampfes im Ultraviolett. Sie bildet eine Fortsetzung zu einer ausgedehnten Reihe von Arbeiten, die ich bereits über diesen merkwürdigen Metalldampf veröffentlicht habe.

Für das richtige Verständnis des Verhaltens dieses Dampfes im Ultraviolett wird ein kurzer Überblick über seine Eigenschaften im sichtbaren Gebiete erforderlich sein.

Die Absorption ist von zweierlei Typus. Eine Balmersche Serie von Doppellinien beginnt mit den D-Linien und erstreckt sich weit ins Ultraviolett. Von dieser Serie waren vor der Veröffentlichung meiner letzten Arbeit über diesen Gegenstand[2]) nur sieben Glieder bekannt. Damals war es mir gelungen, die Zahl auf etwa 30 zu erhöhen, und seither habe ich unter Verwendung eines großen Quarzspektrographen diese Zahl auf 48 gesteigert. Die Wellenlängen, wie sie sich aus den Messungen an den neuen Platten ergeben, sind in der folgenden Tabelle angegeben. Ausführliche Einzelheiten über die Arbeit sind im Märzheft

Wellenlängen der Linien in der Balmerschen Serie des Natriumdampfes.

n	λ in Å.-E.		n	λ in Å.-E.
3	5896,16	Ältere Beobachtungen	26	2422,04
	5890,19		27	2421,29
4	3303,07		28	2420,60
	3302,47		29	2420,02
5	2852,91		30	2419,50
6	2680,46		31	2419,00
7	2594,05		32	2418,44
8	2543,82		33	2418,09
9	2512,15		34	2417,71
10	2490,70		35	2417,38
11	2475,60		36	2417,10
12	2464,53		37	2416,80
13	2456,02		38	2416,56
14	2449,46		39	2416,33
15	2444,24		40	2416,11
16	2440,06		41	2415,89
17	2436,70		42	2415,70
18	2433,85		43	2415,52
19	2431,43		44	2415,37
20	2429,42		45	2415,21
21	2427,72		46	2415,06
22	2426,28		47	2414,94
23	2425,00		48	2414,78
24	2423,88		49	2414,64
25	2422,90		50	2414,50

1) Auch veröffentlicht in Phil. Mag. **18**, 530, 1909.

2) R. W. Wood, An Extension of the Principal Series of the Sodium Spectrum. Phil. Mag. (6) **16**, 945, 1908; vergl. auch R. W. Wood, Die vollständige Balmersche Serie im Spektrum des Natriums. Diese Zeitschr. **10**, 88, 1909.

des Astrophysical Journal vom Jahre 1909 zu finden. Diese Balmersche Serie ist die vollständigste, die bisher beobachtet worden ist, denn im Spektrum des Wasserstoffes auf der Erde erscheinen nur 12 Linien, und in dem des Wasserstoffes auf der Sonne deren 30.

Wie aus der Tabelle ersichtlich wird, fallen die letzten 22 Linien, also nahezu die Hälfte der ganzen bislang beobachteten Serie, in ein Spektralgebiet, das nicht breiter ist als der Abstand zwischen den *D*-Linien!

Kayser gibt auf S. 521 (Handbuch der Spektroskopie, III) die Konstanten der Balmerschen Formel für die Natriumserie an, wie sie sich aus den 7 damals bekannten Linien ergeben.

Diese 7 Linien lassen sich durch den Ausdruck

$10^8 \lambda^{-1} = 41496{,}34 - 127040\, n^{-2} - 843841\, n^{-4}$

gut darstellen.

Auf Grund der nunmehr verfügbaren vollständigen Serie wird eine Neubestimmung der Konstanten erforderlich sein.

Ich habe die Wellenlängen der 32. und 50. Linie nach der Formel berechnet und 2417,5 Å.-E. statt des beobachteten Wertes 2418,44 Å.-E., sowie 2415,2 Å.-E. statt 2414,5 Å.-E. erhalten. Die berechneten Werte sind also von den beobachteten um einen Abstand gleich dem zwischen 4 von den Linien an der betreffenden Stelle entfernt.

Photogramme der Serie sind auf Tafel XXI wiedergegeben. Fig. 1 ist eine Vergrößerung, welche die Linien von $n = 12$ bis $n = 40$ zeigt. Die letzten zehn Glieder liegen zu eng beieinander, um hervorzutreten. Fig. 2 ist in natürlicher Größe wiedergegeben und zeigt die Serie von $n = 8$ an. Als Lichtquelle diente der Kadmiumfunken, und das Eisenspektrum wurde als Vergleichsspektrum auf derselben Platte in der Weise aufgenommen, daß das Bild des Bogens unmittelbar unterhalb des Punktes auf den Spalt entworfen wurde, der von dem Lichte des Funkens nach seinem Durchgange durch den Natriumdampf beleuchtet wurde.

Es ist äußerst interessant zu bemerken, daß eine allgemeine Absorption am Kopfe der Serie beginnt und sich bis an das Ende des Spektrums erstreckt. Mit anderen Worten: Der Dampf ist für das Licht zwischen den Linien der Serie viel durchlässiger als in dem Gebiete unterhalb des Kopfes. Das steht im Einklange mit der verzeichneten Beobachtung eines schwachen kontinuierlichen Emissionsspektrums unterhalb des Kopfes der Serie beim Wasserstoff der Sonne. Fig. 3 zeigt eine Reihe von Spektren, die mit allmählich wachsender Dichte des Dampfes aufgenommen worden sind, und in denen die vollständige Balmersche Serie mit Ausnahme des ersten Gliedes ($n = 3$), der *D*-Linien, erscheint, deren Lage jedoch angedeutet ist. Mit zunehmender Dichte des Dampfes erscheinen die höheren Glieder der Reihe, und die unteren Glieder gehen in den sie begleitenden kannelierten Spektren unter.

Diese kannelierten Spektren sind dem die *D*-Linien begleitenden analog, also dem, welches ich früher in bezug auf Fluoreszenz und magnetische Drehung untersucht habe. Sie unterscheiden sich indessen von ihm in einem Punkte. Das kannelierte Spektrum im sichtbaren Gebiete besteht aus zwei Teilen, wie aus Fig. 4 ersichtlich wird. Das Spektrum „*a*" wurde bei mäßiger Dichte des Dampfes aufgenommen. Die Lage der *D*-Linien ist angedeutet, obwohl sie sich im vorliegenden Falle zu einer sehr breiten Bande erweitert haben. Ein kanneliertes Spektrum erscheint im Rot, Orange und Gelb, und ein anderes im Grünblau, während das gelbgrüne Gebiet frei durchgelassen wird. Mit zunehmender Dichte des Dampfes breitet sich der rotorange Teil über und unter die *D*-Linien hinaus aus, während der blaugrüne nach der anderen Richtung hin vordringt, so daß sich beide gelegentlich bei der Wellenlänge 5500 Å.-E. treffen, woselbst eine breite verwaschene Bande auftritt, die im Spektrum „*b*" eben erscheint und im Spektrum „*a*" sehr deutlich sichtbar ist. Diese Stelle scheint der „Schwerpunkt" zwischen den beiden die *D*-Linie begrenzenden kannelierten Spektren zu sein, wenn wir den Ausdruck „Schwerpunkt" hier anwenden dürfen. Mit einem Spektroskop von geringer Dispersion sieht man nur eine enge grüne Doppellinie an der Stelle, sowie das äußerste Violettblau, während alles übrige abgeschnitten ist. Die Farbe des durchgehenden Lichtes ist von derselben Tiefe und ungefähr von derselben Farbe wie die des durch das dichteste Kobaltglas durchgelassenen.

Wie ich bereits dargetan habe, besteht ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen dem Mechanismus, der dieses kannelierte Spektrum hervorbringt, und jenem, der die *D*-Linien hervorbringt. Durch die Absorption blaugrünen Lichtes, aus dem durch prismatische Zerlegung und durch Farbfilter gelbes Licht sorgfältig ausgeschaltet worden ist, wird nämlich der Dampf veranlaßt, gelbes Licht von der Wellenlänge der *D*-Linien neben der kräftigeren Emission (Linienspektrum) im blaugrünen Gebiete auszusenden.

Ich finde nun, daß auch die übrigen Linien der Balmerschen Serie von kannelierten Spektren begleitet werden, daß diese aber keineswegs das Gegenstück zu den die *D*-Linien umgebenden bilden. Sie bestehen nicht aus zwei Teilen mit einem verhältnismäßig hellen Gebiete dazwischen, sondern breiten sich nach beiden Richtungen, sowohl oberhalb als unterhalb der von ihnen begleiteten Linien, hin aus.

Ich habe Spuren dieser Spektren bis hinab zu der Linie gefunden, für welche $n = 8$ ist. Sie sind in den Spektren „*d*", „*e*" und „*f*" der Fig. 3 deutlich zu sehen, während Fig. 5 das Spektrum, welches die erste ultraviolette Linie ($\lambda = 3300$ Å.-E.) begleitet, in größerem Maßstabe zeigt. Diese Aufnahme wurde mit einem Konkavgitter gemacht, und zwar „*b*" mit dünnem, „*a*" mit dichterem Dampf. Die Balmersche Linie 3303 Å.-E. scheint sich auf der dem sichtbaren Spektrum zugekehrten Seite zu verbreitern (siehe „*a*"), doch beruht dies vielleicht auf der Gegenwart einer Gruppe kräftiger Linien im kannelierten Spektrum. Eine vergrößerte Wiedergabe dieses Gebietes findet sich in Fig. 6; sie soll die komplexe Natur des Spektrums veranschaulichen. Das Spektrum ähnelt in seinem allgemeinen Aussehen dem im blaugrünen Gebiete.

Es drängt sich nun die Frage auf: Weisen diese ultravioletten kannelierten Spektren die Fluoreszenzerscheinungen auf, welche im sichtbaren Gebiete auftreten? Für das erste dieser Spektren (bei der Linie 3303 Å.-E.) kann ich diese Frage bejahen. Die Fluoreszenz kann durch das Triplett im Zinkbogenlicht bei der Wellenlänge 3300 Å.-E. kräftig erregt werden. Das Fluoreszenzlicht ist natürlich unsichtbar, wodurch sein Nachweis erschwert wird. Die Natriumröhre wurde mit einer großen Quarzlinse verschlossen und mittels einer Zinkbogenlampe aus Quarzglas von Heraeus kräftig zur Fluoreszenz erregt. Unter diesen Verhältnissen mußte ultraviolettes Fluoreszenzlicht, wenn solches vorhanden war, im Spektrum erscheinen. Es fand sich, daß dies der Fall war, wie aus Fig. 7 hervorgeht. In dieser Figur ist oben das Spektrum des Zinkbogens dargestellt, unten das Fluoreszenzspektrum. Das Bandenspektrum der Fluoreszenz ist am stärksten in einigem Abstande oberhalb der Zinklinien, d. h. auf der Seite der größeren Wellenlängen. Einschaltung einer Glasplatte zwischen den Bogen und die Natriumröhre bewirkte das Verschwinden der ultravioletten Fluoreszenzbanden, ein Zeichen dafür, daß sie von der Absorption ultravioletten und nicht von der sichtbaren Lichtes herrührten.

Ich versuchte dann zunächst, zu sehen, ob irgendein mechanischer Zusammenhang zwischen den Mechanismen bestände, welche die *D*-Linien und die sichtbaren kannelierten Spektren (deren Zusammenhang ich bereits nachgewiesen habe) und die ultravioletten Linien hervorbringen. Ich isolierte das ultraviolette Triplett des Zinks mittels eines Quarzspektrographen und bildete es auf der Öffnung der Natriumkammer ab. Das Zimmer war vollkommen dunkel, und alles Licht von außen war sorgfältig abgeblendet. Es war keine sichtbare Fluoreszenz zu beobachten. Die ultraviolette Fluoreszenz wurde indessen mit einem zweiten Quarzspektrographen photographiert. Man arbeitet dabei vollständig im Dunkeln, und man kann sich leicht vorstellen, welche Schwierigkeiten die Einstellung der beiden optischen Anordnungen bereitet.

Der Versuch zeigt, daß ein Zusammenhang zwischen den beiden Systemen fehlt.

Darauf stellte ich den umgekehrten Versuch an. Kräftige Erregung seitens des gesamten sichtbaren Spektrums vermochte keinerlei Spur der ultravioletten Bande im Spektrum des Fluoreszenzlichtes zu zeigen, selbst dann nicht, wenn das sichtbare Gebiet zehnfach überexponiert wurde. Dies zeigt wieder das Fehlen eines Zusammenhanges.

Es sieht ganz so aus, als wenn man die verschiedenen Linien der Hauptserie (der Balmerschen Serie) und der sie begleitenden kannelierten Spektren als von verschiedenen Dingen herrührend ansehen kann. Die gewaltige Zunahme der Dichte des Dampfes, die erforderlich ist, um die höheren Glieder der Serie auftreten zu lassen, kann man vielleicht auf den möglichen Umstand zurückführen, daß die Dinge, durch die sie hervorgerufen werden, in geringerer Anzahl vorhanden sind.

Meiner Meinung nach können wir hier zwei Hypothesen aufstellen: einmal, daß die Balmerschen Linien und die sie begleitenden Spektren von Atomen hervorgerufen werden, die ein, zwei, drei, vier usw. Elektronen verloren haben; zweitens, daß sie von Aggregaten oder Komplexen aus ein, zwei, drei oder mehr Atomen hervorgerufen werden. In jedem von beiden Fällen erscheint es wahrscheinlich, daß die Glieder in beständig abnehmender Anzahl vorhanden sein werden.

Ich neige der ersteren Hypothese zu, und zwar aus dem Grunde, weil das kannelierte Spektrum, das die *D*-Linien begleitet, das komplexeste zu sein scheint und die ultravioletten kannelierten Spektren, je weiter wir im Spektrum abwärts gehen, immer weniger komplex werden. Vermutlich würden bei Komplexen, die aus einer größeren Anzahl von Atomen bestehen, mehr Frequenzen möglich sein als bei dem einzelnen Atom; andererseits wäre zu erwarten, daß der Verlust einer großen Anzahl Elektronen die Zahl der verschiedenen Frequenzen herabsetzte. Das ist jedoch ein Punkt, den die mathematischen Physiker behandeln können. Ich habe natürlich im ultravioletten Gebiete keine so hohe Dispersion angewandt wie im sichtbaren, denn einer meiner Schüler, Herr Clinkscales, hat dieses Gebiet im Spektrum zweiter Ordnung des 21 fußigen Gitters photographiert[1]). Der Grund liegt darin, daß es

1) R. W. Wood, Resonance Spectra of Sodium Vapour. Phil. Mag. (6) **15**, 581, 1908. — Die Resonanzspektren des Natriumdampfes. Diese Zeitschr. **9**, 450, 1908.

schwer ist, eine genügend helle Lichtquelle zu erhalten, die ein kontinuierliches Spektrum unterhalb der Wellenlänge 3300 Å.-E. liefert. Für die erste Bande kann man den Krater des Bogens verwenden, aber darüber hinaus müssen wir unsere Zuflucht zum Funken nehmen. Der Krater ist, selbst in der Gegend der Wellenlänge 3300 Å.-E., verhältnismäßig schwach.

Die Photographien, die Herr Clinkscales vom sichtbaren kannelierten Spektrum gemacht hat, zeigen das Vorhandensein von rund 6000 Absorptionslinien, von denen nicht weniger als 30 auf ein Gebiet zusammengedrängt sind, das nicht breiter ist als der Abstand der *D*-Linien voneinander.

Magnetische Drehung.

Das Studium der magnetooptischen Eigenschaften des Dampfes im Ultraviolett ist mit großen experimentellen Schwierigkeiten verbunden. Das einzige bisher erzielte positive Ergebnis ist, daß die magnetische Drehung bei den beiden ersten ultravioletten Gliedern der Balmerschen Serie in demselben Sinne erfolgt wie bei den *D*-Linien. Die benutzte Methode war die übliche: Polarisiertes Licht wurde nacheinander durch den magnetisierten Dampf, durch ein Fresnelsches Doppelprisma aus rechtsdrehendem und linksdrehendem Quarz und durch ein zweites Polarisationsprisma gesandt, und das Bild der horizontalen Streifen wurde auf den Spalt des Quarzspektrographen entworfen. Nicolsche Prismen kann man wegen der Absorption des ultravioletten Lichtes durch den Kanadabalsam nicht verwenden. Man kann indessen den Balsam durch Glyzerin ersetzen oder das Foucaultsche Prisma mit Luftschicht verwenden. Ich habe beide Methoden benutzt. Die Krümmung der Streifen bei den ultravioletten Linien war bei der Linie 3303 Å.-E. sehr gering und bei der Linie 2852 Å.-E. kaum sichtbar, hatte aber zu beiden Seiten der Absorptionslinie dieselbe Richtung und absolut genommen dieselbe Richtung wie bei den *D*-Linien. Mit den Linien im ultravioletten kannelierten Spektrum ist bislang noch nichts erreicht worden, und ich zweifle sehr an Erfolgen auf diesem Gebiete. Im sichtbaren Spektrum ist die Drehung, wie ich bereits gezeigt habe [1]), bei einigen Linien positiv und bei anderen negativ.

Ausführlichere Angaben über diesen Gegenstand werden in einer Arbeit erscheinen, die demnächst im Astrophysical Journal veröffentlicht werden wird, und in welcher die neuesten Ergebnisse mitgeteilt werden sollen, die Herr Dr. Hachett und ich über die Fluoreszenz und die magnetische Drehung des Dampfes gewonnen haben.

Juli 1909.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 13. September 1909.)

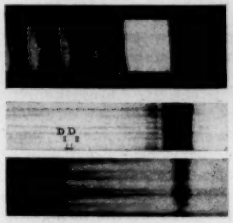
1) R. W. Wood, On the Existence of Positive Electrons in the Sodium Atom. Phil. Mag. (6) 15, 274, 1908. — Über das Vorhandensein positiver Elektronen im Natriumatom. Diese Zeitschr. **9**, 124, 1908.

Interferenzerscheinungen von hoher Reinheit an Kristallen von Kaliumchlorat. (High purity interference phenomena of Chlorate of Potash crystals [1]).

Von R. W. Wood.

Vor einigen Jahren habe ich mich bemüht, große Kristallplatten von Kaliumchlorat herzustellen, um mit ihrer Hilfe durch Reflexion Spektrallinien zum Zwecke der monochromatischen Beleuchtung fluoreszierender Dämpfe zu isolieren. Die Versuche führten nur zu mäßigem Erfolge. Ich erhielt aber ein paar Kristalle, die meines Erachtens engere Reflexionsmaxima zeigten als früher jemals beschrieben worden sind.

Ein Plättchen von ungefähr 6 mm Seitenlänge zeigte bei senkrechtem Einfall Totalreflexion eines Spektralgebietes von nur 10—12 Å.-E. Breite, also nur so breit wie die doppelte Entfernung der *D*-Linien. Das Spektrum des durchgelassenen Lichtes zeigte eine sehr schwarze Bande an derselben Stelle und von derselben Breite. Diese Bande wurde durch geeignete Neigung der Platte in die Nähe der *D*-Linien gebracht und dann photographiert, und die *D*-Linien selbst wurden in der Weise auf der Platte aufgenommen, daß eine Natriumflamme einige Sekunden lang vor den Spalt gehalten wurde. Die Aufnahme ist in der Figur unter „*c*" wiedergegeben. Die Lage der *D*-Linien habe ich auf



dem unmittelbar darüber befindlichen Spektrum bezeichnet, und zwar beziehen sich die Marken nur auf das untere Spektrum.

Durch Vergrößerung des Einfallswinkels kann man die Bande das Spektrum entlang hinunter

1) Auch veröffentlicht in Phil. Mag. **18**, 535, 1909.

wandern lassen. Dabei verbreitert sie sich. Wenn sie im Grün ist, zeigt sie das Aussehen wie im Spektrum „*b*"; sie wird dann von schwächeren seitlichen Minimis begleitet. Daß das reflektierte Gebiet so eng ist, beruht, wie Lord Rayleigh gezeigt hat, auf dem Vorhandensein vielfacher Zwillingsebenen von merklich gleichem Abstande. Aus der Breite des reflektierten Gebietes können wir schätzungsweise die Anzahl der in der Kristallplatte vorhandenen Blättchen ermitteln. Jedes Blättchen liefert uns durch Reflexion ein virtuelles Bild der Strahlungsquelle, und zwar liegen die Bilder bei senkrechtem Einfall in einer Linie hintereinander. Die Wirkung ist der eines Beugungsgitters bei streifendem Austritt des gebeugten Strahles nicht unähnlich. Wenn wir es mit einem Spektrum erster Ordnung zu tun haben, so sind 1000 Linien nötig, um die *D*-Linien aufzulösen. Wie ich in einer früheren Arbeit [1]) dargetan habe, ist im allgemeinen eine Anzahl verschiedener Ordnungen vorhanden, und wenn wir die Spektren im Ultraviolett photographieren, so können wir die Ordnungszahl des Spektrums (oder der Spektren) im sichtbaren Gebiete bestimmen. (Jede Ordnung wird durch ein enges Wellenlängengebiet vertreten, welches selektiv reflektiert wird.) Im vorliegenden Falle zeigt das sichtbare Spektrum nur eine einzige reflektierte Bande (im Gelb), und wir haben es somit offenbar mit dem Spektrum erster Ordnung zu tun. Das Spektrum zweiter Ordnung wird bei der Wellenlänge 2900 Å.-E. oder in deren Nähe zu finden sein. Wenn unsere sichtbare Bande bei der Wellenlänge λ eine Bande zweiter Ordnung wäre, so würden wir eine Bande dritter Ordnung bei der Wellenlänge $\frac{2}{3}\lambda$ oder 4000 Å.-E. haben, und diese würde leicht zu sehen sein.

Wenn wir nun die Breite der Bande in der Photographie mit dem Abstande zwischen den *D*-Linien vergleichen, so erhellt, daß die Kristallplatte beinahe imstande ist, die *D*-Linien zu trennen oder aufzulösen. Mit anderen Worten: Wenn wir die Platte etwas weniger neigen und dadurch die Bande im Spektrum aufwärts wandern lassen, so wird die Platte D_2 eher reflektieren als D_1. Sie war indessen nicht völlig imstande, dies zu leisten, würde aber Linien vom doppelten Abstande der *D*-Linien leicht trennen können. Daraus können wir entnehmen, daß die Anzahl der Zwillingsebenen in dem Kristall irgendwo zwischen 500 und 1000 liegt, sagen wir also rund bei 700. Wenn wir es mit einem Spektrum erster Ordnung zu tun haben, so muß der Gangunterschied zwischen Strahlen, die von zwei aneinander grenzenden Zwillingsebenen reflektiert werden, gleich der Wellenlänge des Lichtes in dem Kristall sein. Wenn wir keine Phasenänderung annehmen, so ergibt das für die Dicke jedes Blättchens rund 0,0002 mm, und wenn wir diese Größe mit 700 multiplizieren, so ergibt das für die Dicke der Kristallplatte 0,14 mm, ein Wert, der von dem wahren nicht sehr weit entfernt ist.

Die hier betrachtete Kristallplatte war aus einer sehr großen Anzahl ausgewählt worden. Anweisungen zur Herstellung der Platten habe ich in der früheren Arbeit [1]) gegeben. Wenn man eine Anzahl ausgewählter Platten nimmt und sie in eine in der Abkühlung begriffene und Kristalle abscheidende Lösung eintaucht, so wird man vielleicht imstande sein, Platten mit einer noch größeren Anzahl von Zwillingsebenen herzustellen. Ich habe dieses Verfahren noch nicht versucht. Wenn man etwas größere Platten herstellen könnte, so würden diese sich dem Spektroskop überlegen erweisen, wo es gilt, Spektrallinien zum Zwecke der monochromatischen Beleuchtung zu isolieren, denn man würde dann eine viel breitere Lichtquelle verwenden können.

Es ist interessant, den in dieser Mitteilung beschriebenen Kristall mit den besten Lippmann-Photographien zu vergleichen, welche Farben zeigen, die sich aus einer Interferenz derselben Art ergeben.

Herr H. E. Ives hat die besten Lippmann-Photographien mit monochromatischem Lichte gemacht, die ich kenne. Das Spektrum der von seiner besten Platte reflektierten Bande ist in der Figur unter „*a*" in demselben Wellenlängenmaßstabe wiedergegeben, d. h. mit demselben Spektroskop aufgenommen. Sie hat etwa die dreifache Breite wie die von dem Kristall reflektierte Bande. Wenn ich mich recht erinnere, hat Herr Ives einen Schnitt durch eine ähnliche Schicht gemacht und ungefähr 250 Silberblättchen gezählt, die von den stehenden Wellen aufgebaut worden waren. Das stimmt gut zu unserer Schätzung für die Zahl der Blättchen in dem Kaliumchloratkristall.

Es ist höchst merkwürdig, daß die Dicke der Blättchen in einer gegebenen Platte so konstant ist und dabei innerhalb so weiter Grenzen wechselt, wenn man verschiedene Platten in Betracht zieht. Eine Platte, die mit einem Abstande von 0,0002 mm zwischen den Zwillingsebenen anfängt, schichtet anscheinend 700 Blättchen von derselben Dicke auf, während eine andere Platte, die mit einer anderen „Gitterkonstante" anfängt, diese bis zu Ende beibehält.

Der Bildungsvorgang dieser Kristalle verdient wohl, weiter untersucht zu werden. Es

1) Interference Colours of Chlorate of Potash Crystals. Phil. Mag. (6) **12**, 67, 1906.

1) Interference Colours of Chlorate of Potash Crystals. Phil. Mag. (6) **12**, 67, 1906.

würde sehr interessant sein, zu sehen, ob man einen einmal begonnenen Kristall dazu bringen könnte, seine Ansicht über seine „Konstante" zu ändern, wenn man die Konzentration oder die Temperatur der Mutterflüssigkeit, in der er sich bildet, verändert.

East Hampton, Long Island, im Juli 1909.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 13. September 1909.)

Gleichförmige Rotation starrer Körper und Relativitätstheorie.

Von P. Ehrenfest.

Bei dem Versuch, die Kinematik relativ-starrer Körper von der gleichförmigen, geradlinigen Translation auf beliebige Bewegungen zu verallgemeinern, gelangt man im Anschluß an Minkowskis Ideen zu folgendem Ansatz:

Ein Körper verhält sich relativ-starr, heißt: er deformiert sich bei einer beliebigen Bewegung fortlaufend so, daß jedes seiner infinitesimalen Elemente in jedem Moment für einen ruhenden Beobachter gerade diejenige Lorentz-Kontraktion (gegenüber dem Ruhezustand) aufweist, welche der Momentan-Geschwindigkeit des Element-Mittelpunktes entspricht.

Als ich mir vor einiger Zeit die Konsequenzen dieses Ansatzes veranschaulichen wollte, stieß ich auf Folgerungen, die zu zeigen scheinen, daß obiger Ansatz schon für einige sehr einfache Bewegungstypen zu Widersprüchen führt.

Nun hat Herr Born in einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) eine Definition der Relativ-Starrheit gegeben, die alle überhaupt möglichen Bewegungen umfaßt. Herr Born hat diese Definition — dem Grundgedanken der Relativitätstheorie entsprechend — nicht auf das Maßsystem eines ruhenden Beobachters basiert, sondern auf die (Minkowskischen) Maßbestimmungen sozusagen eines Kontinuums von infinitesimalen Beobachtern, die mit den Punkten des ungleichförmig bewegten Körpers mitwandern: jedem von ihnen soll in seinem Maß seine infinitesimale Umgebung dauernd undeformiert erscheinen.

Beide Definitionen der Relativ-Starrheit sind aber — wenn ich richtig verstanden habe — äquivalent. — Es sei deshalb gestattet, kurz auf den einfachsten Typus einer Bewegung hinzuweisen, bei dem die erstangeführte Definition schon zu Widersprüchen führt: die gleichförmige Rotation um eine feste Achse.

In der Tat: Es sei gegeben ein relativ-starrer Zylinder vom Radius R und der Höhe H. Es werde ihm allmählich eine schließlich konstant bleibende Drehbewegung um seine Achse erteilt. Sei R' der Radius, den er bei dieser Bewegung für einen ruhenden Beobachter aufweist. Dann müßte R' zwei einander widersprechende Forderungen erfüllen:

a) Die Peripherie des Zylinders muß gegenüber dem Ruhezustand eine Kontraktion zeigen:

$$2\pi R' < 2\pi R,$$

denn jedes Element der Peripherie bewegt sich in seiner eigenen Richtung mit der Momentangeschwindigkeit $R'\omega$.

b) Betrachtet man irgendein Element eines Radius, so steht seine Momentangeschwindigkeit normal zu seiner Erstreckung; also können die Elemente eines Radius gegenüber dem Ruhezustand keinerlei Kontraktion aufweisen. Es müßte sein:

$$R' = R.$$

Bemerkung: Will man die Deformation jedes Elementes nicht nur von der Momentangeschwindigkeit des Elementmittelpunktes abhängen lassen, sondern auch noch von der momentanen Rotationsgeschwindigkeit des Elementes, so muß die Deformationsfunktion außer der Lichtgeschwindigkeit c noch eine universelle, dimensionierte Konstante enthalten oder es müssen in sie auch noch Beschleunigungen des Elementmittelpunktes eingehen.

St. Petersburg, Sept. 1909.

(Eingegangen 29. September 1909.)

[1]) M. Born, Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitäts-Prinzipes. Ann. d. Phys. **30**, 1, 1909. Vergl. auch diese Zeitschr. **10**, 814, 1909.

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN VON DER 81. NATURFORSCHERVERSAMMLUNG ZU SALZBURG.

Abteilung für Geophysik, Meteorologie und Erdmagnetismus.

W. Krebs (Großflottbek), Das meteorologische Jahr 1908/1909[1]).

Die Zunahme der Niederschlagsmenge in Mitteleuropa, die in den drei letzten Jahresberichten nachgewiesen ist, hat in dem Jahrgange vom September 1908 bis August 1909 nicht vorgehalten. Von 300 zurzeit schon verfügbaren Monatswerten deutscher Stationen waren nicht weniger als 196, also 65 Proz., unternormal.

[1]) 1907/08: diese Zeitschr. **9**, 844, 1908.

Doch handelt es sich hier, innerhalb des bekannten Zickzackkurses meteorologischer Vorgänge, anscheinend um eine örtliche Erscheinung, örtlich allerdings in einem verhältnismäßig großen Gebiete. Während die höchste Niederschlagsmenge an den bearbeiteten deutschen Stationen innerhalb 24 Stunden 76 mm nicht überstieg, stellte die Station Riposto an der Ostküste Siziliens den Rekord dieser Messungen in Europa auf. November 17, 1908 brachte dort nicht weniger als 465 mm, 65 mm mehr als zu Bleymard in den nordwestlichen Vorbergen der Cevennen, das mit 400 mm, am 13. September 1855 gefallener Niederschläge bisher jenen europäischen Rekord hielt. Nun war gerade im vorhergehenden Monat, Oktober 1908, der Gesamtbetrag der Niederschläge an mehreren europäischen Stationen gleich Null. Demnach darf in dem Rekorde des 17. November 1908 eine Äußerung der Tendenz zur unvermittelten Aneinanderreihung schärfster Gegensätze gefunden werden, über die aus der, seit 1904 anhaltenden Epoche hochgesteigerter Sonnentätigkeit wiederholt berichtet ist[1]). Die Schneeschmelze im März 1909 und Tiefbildung durch Interferenz der Druckrinnen nordischer und südländischer Depressionsgebiete des Luftdruckes im Juli und ebenso noch im August und September 1909 führten zwar zu Hochwasseralarmen, aber nicht zu wirklicher Hochwassergefahr.

Die meteorologische Einwirkung der Sonnentätigkeit äußerte sich, wie in den früher daraufhin bearbeiteten Jahrgängen, direkt in der Förderung der Gewitterbildung innerhalb der Atmosphäre Mitteleuropas selbst und indirekt in der Beeinflussung, welche die Wetterlage durch Tief- und Sturmbildung in den tropischen Herdgebieten des West-Atlantik und des West-Pazifik erfuhr.

Daß es sich bei der Gewitterbildung tatsächlich um einen äußeren, auf die Erde als Ganzes wirkenden Einfluß handelte, wie ihn die Sonnentätigkeit darstellt, konnte durch einen statistischen Vergleich der Ausbreitung der Gewittererscheinungen in drei, durch stärkste Wetterscheiden getrennten Gebieten nachgewiesen werden: in Deutschland, in Italien und in der Union. Die Wetterscheiden sind hier das Hochgebirge der Alpen und der nordatlantische Ozean. Trotz ihrer streng scheidenden Wirkung wies der Gang der Gewitterhäufigkeit in den drei Gebieten von April bis August 1909 große Übereinstimmung auf. Er wurde, wie ein Vergleich mit den Epochen der Erde zugerichteten Steigerung der Sonnentätigkeit ergab, in allen drei Gebieten gleicherweise durch die Sonnentätigkeit bestimmt. „Diese scheint über das Eintreten gewitterhafter Zustände in der Atmosphäre mittlerer Breiten der Erde zu entscheiden, wie sie über das Eintreten der Nordlichterscheinungen in höheren Breiten der Erde zu entscheiden pflegt“[1]).

Den häufigen und verbreiteten Gewittern jener 5 Monate müssen die scharfen Temperaturgegensätze jedenfalls teilweise zugeschrieben werden, die in den 3 Sommermonaten auch im mitteleuropäischen Niederungsgebiete die Temperaturen allmonatlich auf 2—0° herab- und auf 33—34° heraufbrachten. Gegen Mitte August 1909 stellte sich die wegen der Reihe September 1908, Oktober 1907, November 1906, Dezember 1905 im vorigen Jahresbericht erwartete Erwärmung pünktlich ein. Die Monatsmaxima von 33° entfielen auf August 8 und 18, 1909.

Wenn man aus jener großzügigen Analogie weiter schließen darf, so ließe sie einen besonders frühen und strengen Winter erwarten, der 1908 ja schon im Oktober mit einer Periode ungewöhnlich strengen Frostes einsetzte. Soviel ist sicher, daß jene Erwärmung, wie die sonstigen Wärme-Epochen des Sommers, in deutlichem Zusammenhang standen mit vorgängigem Auftreten der sogenannten warmen Wellen in Nordamerika, auf deren enge Beziehung zu teifunartigen Sturmerscheinungen, besonders westpazifischen Ursprungs, in früheren Berichten hingewiesen ist. Der damals behauptete Zusammenhang hat durch die von dem Direktor des kanadischen Witterungsdienstes Dr. Stupart im Monthly Weather Review veröffentlichten Zugstraßen westkanadischer Tiefs eine sehr wesentliche Bestätigung und Ergänzung erhalten. Auch ist vom U. S. Weather Bureau, auf solche große Luftdruckänderungen hin, über dem Pazifik, im September 1908 eine zutreffende Prognose starker Niederschläge auf 2—6 Tage im voraus gestellt worden.

Für Mitteleuropa kann man geradezu einen Unterschied machen zwischen Polarwetter, das durch vorwiegend westpazifische, und Äquatorialwetter, das durch vorwiegend westatlantische Sturm- und Tiefbildung veranlaßt wird. Im verflossenen Jahrgange 1908/1909 konnte wiederholt, wie schon in den beiden früheren Jahrgängen, auf das bevorstehende Vorwalten des einen oder des anderen Typus aus der Streifung

1) Vgl. besonders die Referate in den Verhandlungen Deutscher Naturforscher und Ärzte und der Deutschen Physikalischen Gesellschaft für 1906 von Vorträgen desselben Verfassers.

1) Vgl. des Vortragenden Berichte über Sonnentätigkeit und Witterung in Bd. VI von Dr. Völlers „Natur und Kultur“, München 1909, besonders S. 669. Als neuere Bestätigung sei hier hervorgehoben, daß die vorberechnete Epoche der Sonnentätigkeit von September 24—28, 1909, die am 25. September durch starke erdmagnetische Störungen und ausgebreitete Polarlichterscheinungen Aufsehen erregte, in Deutschland wie in Italien auch die weiteste Gewitterverbreitung der Dekade brachte. Die gewitterreichsten Tage waren dort der 26., hier, neben dem 23., der 26. und 27. September 1909.

der morgendlichen Cirri geschlossen werden [1]). Ihre Nordrichtung deutete regelmäßig auf vorwiegende Wirkung der Sonnentätigkeit zu mitternächtigen Zeiten, demnach auf die folgenreiche Aktion der westpazifischen Herde der Sturm- und Tiefbildung.

1) Vgl. diese Zeitschr. **9**, 846, 1908.

(Eingegangen 19. Oktober 1909.)

W. Krebs (Großflottbek), **Abyssotektonik, besonders der Ozeane.**

Das Seebeben vom 4. September 1908, dessen seismographische Bestimmung schon im vorjährigen Vortrage über Vulkanismus im Planetensystem erwähnt wurde [1]), ist außer vom Dampfer „Martinique" noch von dem Segelschiff „Persimmon" berichtet worden. Solche Schiffsberichte zeichnen sich durch genaue Orts- und Zeitbestimmung aus. Trotzdem war es unmöglich, aus den europäischen Seismogrammen mehr als den Nachweis zu führen, daß um die gegebene Zeit in dem Azorenmeere ein Beben vorgefallen sei [2]). Die genaue Berechnung eines Epizentrums versagte.

Das kann an zwei Ursachen liegen, deren jede in ihrer Art zu begründen ist.

Einmal werden die Vorläuferwellen der Erdbeben mit wechselnder Geschwindigkeit fortgepflanzt. Diese verschiedene Geschwindigkeit hat den Anlaß gegeben zu den Untersuchungen der Herren Benndorf und Wiechert, aus denen sich nach Wiechert im wesentlichen eine Scheidung des Erdinnern in den besser leitenden Metallkern und den schlechter leitenden Steinmantel ergab.

Bekräftigung erfuhr dieser Hauptzug einer Tektonik der Tiefe durch die von Herrn Oddone entdeckten makroseismischen Konstanten, nach meiner genaueren Nachberechnung 33 und 62 Minuten, die auf eine Art antipodaler Echowirkung der Vorläuferschwingungen hinauskommen [3]). Denn ungefähr 34 Minuten erfordern nach Benndorf die ersten, 66 die zweiten Vorläuferwellen, um den Weg durch das Erdinnere nach den Antipoden und von ihnen zurück zu machen. Mir selbst ist es möglich gewesen, an einem, aus der Erdbebenstatistik Jamaikas und der Philippinen vervollständigten Material, die sonst noch häufig vorkommenden Intervalle von 24 und von 5 Minuten zu erweisen als seismische Konstanten des Metallkernes und des Steinmantels allein. Die Dicke des letzeren ergibt sich dann zu 1300—1450 km.

Da die Kompressionswärme schon jenseits 300 km Tiefe im Erdinnern weder festen noch flüssigen Zustand zuläßt, handelt es sich in jenen Tiefen von 1300—1450 km um vergaste Massen, denen aber die den Gasen sonst zukommende Eigenschaft unbeschränkter gegenseitiger Durchdringung abgeht. Man darf da an besondere Schichtenwirkungen des ungeheuren Druckes denken, vergleichbar der Schieferung in Gesteinen, vielleicht auch an verschiedene Bewegungszustände der an der Grenzfläche aufeinander gleitenden Gasmassen, veranlaßt durch die Rotation des ganzen, zu konzentrischen Kugeln geballten Systems.

Jedenfalls ist mit der Tatsache dieser Grenzfläche zwischen Gasen zu rechnen. Da es sich um ebenfalls tatsächlich nachgewiesene Schwingungen handelt, von denen sie durchsetzt werden, so erscheinen transversale Wellen entlang der Grenzfläche unausbleiblich. Ihr Vorhandensein reicht hin, um die bisher vergebens gesuchte Erklärung für Unregelmäßigkeiten zu liefern, die bei der Fortpflanzung der Vorläuferwellen beobachtet sind, besonders die abnorme Verfrühung ihrer Ankunft bei wesentlich ferner gelegenen Stationen. Denn schon, wenn ein das Erdinnere durchsetzender Vorläuferstrahl auf eine besonders günstige Phase solcher pulsierenden Schwingungen des Metallkernes trifft, wird er rascher fortschreiten als in anderen Fällen.

Die andere mögliche Ursache ist durch vulkano- und seismotektonische Linien gegeben, die auf Grund der Seebebenstatistik entworfen werden konnten. Denn an solchen Linien festländischer Erdbebengebiete ist von Hobbs und anderen der Nachweis geführt, daß sie als Stoßlinien an die Stelle punktförmiger Epizentren zu treten vermögen.

Die zunächst für den Atlantischen und Indischen Ozean entworfenen tektonischen Linien oder Linienscharen weisen die Eigentümlichkeit auf, einmal außerordentlich lang zu sein und dann, von den tiefsten, und als tatsächlich vulkanisch nachgewiesenen Stellen dieser Ozeane auszustrahlen.

Aus dem Pazifischen Ozean sind die entsprechenden Gebilde längst bekannt als die seitlichen Grenzlinien der weithin nach gleicher Richtung ausgedehnten Grabenbrüche, denen tatsächlich auch die Kilometerteufen dieses Ozeans angehören. Der Pazifik macht in dieser Hinsicht den Eindruck des ältesten und in seiner Entwicklung am weitesten fortgeschrittenen Ozeans.

Die große, über Hunderte und Tausende Kilometer reichende Ausdehnung der tektonischen

1) Diese Zeitschr. **9**, 773, 1908.

2) W. Krebs, Vulkanischer Ausbruch am 4. September 1908 in der Tiefe des Azorenmeeres; Archenholds Weltall **9**, 168—172; derselbe, Seebeben aufgezeichnet als Fernbeben, Wiener Urania **2**, 196—198.

3) Emilio Oddone, Quelques constantes sismiques trouvées par les macrosismes. Publications du Bureau Central de l'Association Internationale de Sismologie. Straßburg 1907.

Linien der Ozeane schafft der Anschauung von bevorzugten seismisch-vulkanischen Zonen der Erde eine reale Grundlage. Und diese läßt es begreiflich erscheinen, daß innerhalb der ausgeprägtesten dieser Zonen, der der Mittelmeere, nicht allein antipodale Beben gleichzeitig oder nach kurzen Intervallen einander folgen, sondern daß sich auch Systeme solcher korrespondierender Katastrophen einstellen, die nicht bloß, wie jene, den Erdenrund halbieren, sondern ihn vierteln.

Dieses Verhalten ist für die Jahre 1907 und 1909 nicht weniger als viermal nachgewiesen. Seine Bedeutung für gelegentliche Vorausbestimmung der Örtlichkeit von Erdkatastrophen ist unverkennbar. Denn durch drei Glieder einer solchen Kette ist der Ort des vierten mit ziemlicher Genauigkeit bestimmt. Für die Erdkatastrophen mit zerstörender antipodaler Korrespondenz schlägt der Vortragende die Anwendung der Bezeichnung „Weltbeben", für die den Erdenrund viertelnden Reihen die Bezeichnung „ringbildende Weltbeben" vor[1]).

1) Der Vortrag über Abyssotektonik gehört in den Bereich eines Buches, das unter demselben Titel in Dr. Völlers Verlag (München) erscheinen soll.

(Eingegangen 19. Oktober 1909.)

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Neuere Fortschritte in der Farbenphotographie.

Von A. Byk.

Das eigentliche Ziel, das von der Photographie von Anfang an verfolgt wurde, war die Lösung der Aufgabe, direkt, mit Hilfe einer einzigen Platte, kopierfähige Bilder in natürlichen Farben herzustellen. Der Erledigung dieser Aufgabe, soweit die Anwendung einer einzigen einheitlichen Platte in Betracht kommt, dienen die beiden Verfahren der sog. direkten Farbenphotographie. Beim ersten derselben, der Interferenzmethode, werden innerhalb der photographischen Schicht durch stehende Lichtwellen einer bestimmten Länge Silberniederschläge maximaler Dichte oder auch Produkte anderer photochemischer Prozesse im Abstande von je einer halben Wellenlänge voneinander erzeugt. Man kann sich davon überzeugen, daß derartige Schichten bei der Reflexion infolge von Interferenz diejenigen Farben am stärksten zum Ausdruck bringen müssen, durch welche sie erzeugt sind. Bei dem Ausbleichverfahren fällt das Licht auf ein Gemisch verschiedener lichtempfindlicher Farbstoffe, die in allen möglichen Nuancen gefärbt sind. Dabei werden, da aus Gründen der Energieerhaltung nur absorbiertes Licht wirken kann, allmählich alle Farbstoffe zerstört, welche das auffallende Licht verschlucken. Übrig bleiben diejenigen, welche die betreffende Lichtart hindurchlassen. Wird also etwa eine rotbelichtete Stelle des empfindlichen Gemisches nach dem Fixieren mit weißer Strahlung belichtet, so wird sie nunmehr rot erscheinen. Beide Arten von Bildern sind indes zunächst nicht kopierfähig.

Die Fortbildung des Interferenzverfahrens in neuerer Zeit bezieht sich hauptsächlich auf eine möglichst farbengetreue Wiedergabe der natürlichen Objekte. Wenn es nämlich auch nach der geschilderten Auffassung im großen und ganzen verständlich ist, daß ein Interferenzbild die Farbe des Gegenstandes wiedergibt, so läßt sich doch übersehen, daß genaue Wiedergabe gemischter Nuancen, wie sie alle natürlichen Objekte zeigen, jedenfalls nur unter ganz bestimmten Bedingungen möglich sein kann. Die Nuance eines Violett, zu dem sich z. B. das Rot und Blau bei der Reflexion an einer Interferenzplatte miteinander vereinigen, wird offenbar von der Dichte der Silberschichten abhängen müssen, deren Abstände den roten, bzw. den blauen Strahlen entsprechen. Die Stärke der Silberniederschläge ihrerseits hängt aber, wenn es sich um zwei verschiedene Farben handelt, nicht nur von der Intensität des auffallenden Lichtes ab, sondern auch von der spezifischen Empfindlichkeit der Schicht für die einzelnen Farben, die noch eine außerordentlich verschiedene sein kann.

Man sollte zunächst vermuten, daß die Bedingungen für angemessene Mischung aller Spektralfarben dann erfüllt sein werden, wenn die Platte isochromatisch, d. h. für alle Farben gleich empfindlich ist. Das ist indes nach H. Lehmann[1]) nicht der Fall. Vielmehr zeigt eine genauere Untersuchung, daß die Empfindlichkeitskurve der Platte nach oben konkav sein muß, d. h. sie muß zwei Maxima besitzen. Gründe der physiologischen Optik bedingen weiterhin, daß diese beiden Maxima im Spektrum komplementär zueinander liegen müssen. Die Verwendung derartiger sensibilisierter Platten ergibt nicht nur eine reinere Wiedergabe der Farben, sondern bedingt gleichzeitig einen höheren Grad ihrer Sättigung, d. h. eine Elimination des störenden Weiß. Außerdem hat man den mehr zufälligen Vorteil, Sensibilisatoren mit kräftigeren Maximis verwenden zu

1) Eders Jahrb. f. Photographie 1908, 157.

können, wodurch eine höhere Allgemeinempfindlichkeit der Platte und somit kürzere Expositionszeiten erzielt werden.

Nach der technischen Richtung ist bei der Firma Zeiß ebenfalls durch H. Lehmann das Interferenzverfahren weiter vervollkommnet worden. So wird die Quecksilberschicht, die schon seit langem als reflektierende Wand für die Ausbildung der stehenden Wellen benutzt wurde, jetzt in Form einer sog. Quecksilberkassette verwandt, bei welcher die störende Schlierenbildung durch die Art des Zuflusses des Quecksilbers vermieden werden soll.

Bekanntlich läßt sich jedes Schwarz-Weiß-Negativ durch direkten Kontakt mit einer lichtempfindlichen Schicht in ein Positiv verwandeln, ein Prozeß, der mit dem gleichen Negativ beliebig oft wiederholt werden kann. Der Grund, aus welchem die meisten farbigen Photographien nicht kopierfähig sind, ist der, daß sie nicht in der Durchsicht als Negative erscheinen, d. h. bei einem farbigen Bilde, wo es sich nicht nur um Helligkeits-, sondern auch um Farbenwerte handelt, daß sie nicht im durchfallenden Lichte in den zum Objekt komplementären Farben wahrnehmbar gemacht werden können. Nun ist es Lippmann[1]) gelungen, statt Bromsilbergelatine eine andere photographische Schicht aufzufinden, die nicht nur, wie früher angegeben, im auffallenden Lichte die Farben des Originals wiedergibt, sondern welche das Licht genügend hindurchläßt, um im durchfallenden Lichte komplementär zur Farbe der Aufsicht zu erscheinen. Eine Schicht von Bichromatgelatine, wie sie namentlich bei den photomechanischen Verfahren häufig verwandt wird, verliert im Lichte ihre Quellbarkeit im Wasser. Wird eine solche Schicht in der Quecksilberkassette exponiert, so werden die Stellen der Wellenbäuche unquellbar, und beim Befeuchten der Platte treten in der Aufsicht die natürlichen Farben auf, da infolge der Verschiedenheit des Brechungsexponenten in den gequollenen und nichtgequollenen Schichten Reflexionen und damit Interferenzerscheinungen zustande kommen. Es ist möglich, diese Bilder durch Einlagerung von Jodsilber in die nicht mehr quellfähige Schicht zu fixieren. Da derartige Bilder nun im durchfallenden Lichte, wie erwähnt, deutlich zu sehen sind, und zwar in der zum Original komplementären Farbe, so braucht man sie nun nur im Kopierrahmen mit einer Platte gleicher Art in Kontakt zu bringen, die dann in der Durchsicht die natürlichen Farben zeigen wird. Sofern eine einzige „Negativplatte" beliebig oft hierzu benutzt werden kann, ist eine Kopierfähigkeit der Interferenzbilder erzielt.

1) Comptes rendus 140, 1508.

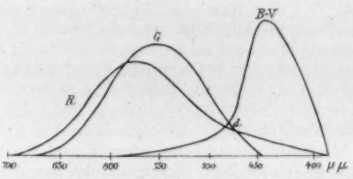
Ein Nachteil des Verfahrens, der seine praktische Anwendbarkeit vorläufig illusorisch macht, liegt allerdings in seiner außerordentlichen Unempfindlichkeit. Eine Bichromatplatte für Zwecke der Interferenzphotographie ist 60mal weniger empfindlich als eine kornlose Bromsilberemulsion, und die Orthochromasie des Verfahrens ist ebenfalls recht mangelhaft, weil die Bichromatplatten nicht rotempfindlich sind.

Es liegen auch Versuche vor, das Ausbleichverfahren in die Praxis einzuführen. Dabei hat man von dem ursprünglichen Material, dem farbenempfindlichen Chlorsilber, abgesehen und an seiner Stelle Mischungen lichtempfindlicher organischer Farbstoffe benutzt, wie dies I. H. Smith (Utopapier), Szczepanek und Neuhauß getan haben.

Eine größere praktische Bedeutung als den direkten Verfahren kommt nach wie vor den indirekten Methoden der Farbenphotographie zu, welche mit drei Teilaufnahmen arbeiten, die allerdings auch auf einer einzigen Platte (siehe unten: Kornraster- und Linienraster-Platte) vereinigt sein können. Die hier erzielten praktischen Fortschritte werden deutlicher verständlich, wenn wir zunächst die Aufklärungen in Betracht ziehen, die durch reine Laboratoriumsuntersuchungen über die hierbei verlaufenden Vorgänge, vor allem im Zusammenhang mit Fragen der physiologischen Optik erzielt worden sind. Um Förderung der Farbenphotographie nach dieser Richtung hin hat sich B. Donath Verdienste erworben. In seiner Monographie „die Grundlagen der Farbenphotographie"[1]) legt er eingehend die Forderungen dar, die die Theorie in bezug auf die Farbenfilter stellen muß, und zwar sowohl in bezug auf die Aufnahmefilter, die zur Herstellung der drei Teilnegative dienen, wie auch auf diejenigen, die man zur Betrachtung der fertigen Teilbilder verwendet. Die Möglichkeit, überhaupt mit Hilfe gerade dreier Teilaufnahmen und nachherige Zusammensetzung derselben ein naturfarbiges Bild herzustellen, setzt voraus, daß das normale Auge nur dreier qualitativ verschiedener Grundempfindungen fähig sei. Im allgemeinen wird jede Wellenlänge jede dieser drei Grundempfindungen zu einem gewissen Betrage auslösen können, wenn auch in bestimmten Spektralbezirken die eine oder auch zwei der drei Grundempfindungen so stark überwiegen mögen, daß sie praktisch allein in Betracht kommen. Man kann sich dies am einfachsten nach Young-Helmholtz so vorstellen, daß im Auge drei verschiedene photochemisch empfindliche Substanzen vorhanden sind, on denen jeder eine bestimmte

1) Sammlung: die Wissenschaft, Heft 14. Braunschweig bei Vieweg 1906.

spektrale Empfindlichkeitsverteilung zukommt, wie einer sensibilisierten oder auch nichtsensibilisierten photographischen Platte. Besäße man eine ideal sensibilisierte Schicht, d. h. eine solche, welche in jedem Spektralgebiet für gleiche Energie gleiche Schwärzung ergibt, so müßte man die Aufnahmefilter so wählen, daß die spektrale Verteilung des von ihnen durchgelassenen Lichtes genau derjenigen der Empfindlichkeitskurve der drei hypothetischen lichtempfindlichen Nervensubstanzen entspräche, weil jedes Filter im Verein mit der zugehörigen Platte eine der drei Nervengruppen ersetzt. Die Filter sollen also nicht nur einzelne Farben durchlassen, sondern mehr oder weniger abgeflachte Durchlässigkeitsmaxima besitzen. Von den drei Nervensubstanzen hat diejenige, deren Empfindlichkeitsmaximum am meisten nach Rot zu liegt (Figur), „die rotempfindliche" ihr Maximum bei etwa 575 $\mu\mu$, die grünempfindliche bei 550 $\mu\mu$ und die blau- bzw. violettempfindliche bei 450 $\mu\mu$, wie dies nachstehende Kurve [1]) zeigt. Da jedes einzelne der drei Teilnegative einer Grundempfindung entspricht, so muß es nach Umwandlung in ein Diapositiv durch ein Filter betrachtet werden, welches nur Strahlen hindurchläßt, die eine und nur eine Grundempfindung, bzw. die zugehörige Nervensubstanz erregen können. Man sieht aber an der Figur, daß stets, wenn das Filter auch nur eine einzige Spektralfarbe hindurchläßt, alle drei Nervensubstanzen erregt werden. Nun ergibt aber gleichzeitige Erregung aller drei Nervensubstanzen in gleichem Beitrage Weiß, d. h. keine ausgesprochene Farbenempfindung. Betrachten wir also einen Schnittpunkt zweier Kurven, etwa d (Figur), so wird



die Erregung der Grün- und Rot-Empfindung nebst einem durch AB seiner Größe nach wiedergegebenen Bruchteil der Violettwirkung insgesamt Weiß ergeben. Es bleibt so eine zwar weißlich verwässerte, aber ihrem Farbcharakter nach reine Grundempfindung, in diesem Falle die blauviolette, übrig. Ein Filter also, welches nur die durch d charakterisierte Wellenlänge von 475 $\mu\mu$ hindurchläßt, wird demgemäß ein ideales Filter für die Betrachtung des blauvioletten Teilbildes sein. Diese Wellenlänge stimmt nicht etwa mit dem Empfindlichkeitsmaximum für die blauviolette Grundempfindung (450 $\mu\mu$) überein. Indes setzen diese Forderungen eine gleichmäßig sensibilisierte Platte voraus, die wir gar nicht besitzen, und auch im übrigen hat sich herausgestellt, daß in praxi eine derartige Unterscheidung zwischen Aufnahme- und Reproduktionsfiltern nicht erforderlich ist, wenn es sich nicht gerade darum handelt, das Spektrum zu reproduzieren. In diesem Falle freilich ergibt die von Donath entwickelte Methode anderweitig nicht erreichbare Resultate.

Um nun den Forderungen der Theorie in bezug auf die Filter auch nur einigermaßen gerecht werden zu können, braucht man Platten, die eine in erster Annäherung gleichmäßige Empfindlichkeit über das gesamte Spektrum hin besitzen. Dabei ist es natürlich wegen der überwiegenden Violettempfindlichkeit der meisten photochemischen Prozesse schwer, die Empfindlichkeit im langwelligen Gebiete genügend zu verstärken. Dieser Forderung werden in höherem Maße als die früher gebrauchten Sensibilisatoren wie Azalin eine Reihe von Farbstoffen gerecht, die neuerdings, meist unter Trivialnamen, in den Handel gebracht werden. Die weitgehende Rotempfindlichkeit der Cyanine (Kondensationsprodukte aus Alkylchinoliniumjodiden und Lepidinjodalkylat) war infolge der Neigung der damit sensibilisierten Platten zur Schleierbildung nicht voll auszunutzen. Statt ihrer führten A. Miethe und A. Traube die Isocyanine (Äthylrot) ein, bei welchen das Lepidin durch Chinaldin ersetzt war und welche die Vorzüge der Cyanine ohne seine Nachteile besitzen. Späterhin sind dann eine ganze Anzahl ähnlicher Sensibilisatoren, wie z. B. das Pinachrom der Höchster Farbwerke, dargestellt worden. Erwähnt seien ferner noch von neueren Sensibilisatoren das Pinaverdol, Pinacyanol, Orthochrom und Homocol. In diesen Sensibilisatoren werden entweder die gewöhnlichen Bromsilberplatten unmittelbar vor dem Gebrauch gebadet (Badeplatten), oder sie werden bereits in der Fabrik in der Emulsion sensibilisiert (Perchromoplatte usw.).

Bei der Wiedervereinigung der drei Teilaufnahmen zu einem einheitlichen farbigen Bilde unterscheidet man die additive und die subtraktive Synthese. Bei der ersteren gelangt die Summe der durch die drei Reproduktionsfilter hindurchgelassenen Lichtarten zur Wirkung, bei der letzteren der Rest, welcher nach Abzug aller von irgendeinem Filter absorbierten Wellenlängen vom weißen Lichte noch übrig bleibt. Man kann nämlich die Filter, die das durch die drei Teildiapositive hindurchgehende Licht filtrieren, erstens nebeneinander

1) Donath, l. c., S. 90.

anbringen; dann wirkt die Summe des durchgelassenen Lichtes. Man kann aber auch zweitens die einzelnen Filter aufeinander legen; dann wird nur dasjenige Licht wirken, das von keiner der gefärbten Schichten absorbiert wird, und der ganze Rest wird vom weißen Lichte „subtrahiert". Die imponierendste, wenn auch praktisch nicht bedeutungsvollste Form der additiven Synthese ist das Projektionsverfahren, bei welchem nach den drei Teilnegativen Diapositive angefertigt werden, die mit Hilfe starker weißer Lichtquellen durch je ein dem Aufnahmefilter entsprechendes bzw. gleichwertiges Reproduktionsfilter hindurch übereinander auf einen Schirm projiziert werden. Hier sind in konstruktiver Hinsicht einerseits durch Miethe, andererseits durch Donath Fortschritte im Bau der Projektionsapparate erzielt worden. Auch sind diesem Verfahren die allen Methoden der indirekten Farbenphotographie gemeinsamen Fortschritte in der Herstellung der Platten und Filter zugute gekommen.

Besondere Aufmerksamkeit haben in den letzten Jahren die Versuche erregt, die Reproduktionsfilter, in lineare oder auch punktförmige Elemente aufgelöst, direkt auf der zu betrachtenden Platte (dem Diapositiv) anzubringen. Die Bedingung dafür ist natürlich, daß auch die drei Teilnegative, bzw. Teildiapositive in punktförmige oder lineare Elemente aufgelöst werden, wobei stets die Elemente einer Teilplatte durch die entsprechenden Filterelemente abzudecken sind. Hierhin gehört das Autochromverfahren der Brüder Lumière und die additive Synthese mittels Linienraster (Warner-Powrie-Prozeß und Omnicoloreplatte von Ducos de Hauron).

Beim Autochromverfahren werden auf einer gelatinierten Glasplatte eine große Anzahl Stärkekörner ausgebreitet, die in den Grundfarben des Systems, Orangerot, Grün und Violett, gefärbt sind. Die Mengenverhältnisse derselben sind so bemessen, daß sie in ihrer Gesamtwirkung ein farbloses Grau ergeben. Diese gefärbte Körnerschicht wird mit der panchromatischen Emulsion überzogen. Die so präparierte Glasplatte wird durch die Glasseite hindurch dem Lichte ausgesetzt. Würde man jetzt entwickeln und fixieren, so würde man unter jeder der drei einfarbigen, aus diskreten Elementen bestehenden Schichten ein aus einzelnen Punkten zusammengesetztes Negativ erhalten. Betrachtet man dieses Negativ durch die Aufnahmefilter, d. h. sieht man einfach durch die gefärbte Stärkekornschicht hindurch, so erhält man ein der Wirklichkeit in den Farben komplementäres Bild. Das ist ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, daß es bei der additiven Synthese zu Zwecken der Projektion erforderlich ist, die Negative zunächst in Diapositive umzuwandeln, um ein naturwahres und nicht etwa ein dem Original in den Farben komplementäres Bild zu erhalten. Nun kann man natürlich nicht von den Teilnegativen unter der Stärkekornschicht Diapositive anfertigen und Punkt für Punkt wieder mit einem gleichartigen Filter bedecken. Man muß daher das Negativ selbst, bevor es entsteht, in ein Diapositiv umwandeln, und dazu benutzen die Brüder Lumière die folgende Methode. Die Platte wird nur entwickelt, aber nicht fixiert. Statt dessen wird sie in einer oxydierenden Flüssigkeit gebadet, welche das metallische Silber auflöst, das unveränderte Bromsilber aber zurückläßt. Man braucht nun nur noch die ganze Platte frei dem Tageslichte auszusetzen, zu entwickeln und zu fixieren, um eine Schicht zu erhalten, welche Schatten und Lichter im umgekehrten Verhältnis wie die ursprüngliche Schicht besitzt. Mit anderen Worten: das Negativ, bzw. die Negative sind gar nicht entstanden, sondern an ihrer Stelle die Diapositive. Das neue Verfahren, welches, wenn auch nicht theoretisch (es wird zwar eine einzige, aber keine einheitliche Platte verwandt), so doch praktisch zum ersten Male in einigermaßen befriedigender Weise das Problem der direkten Farbenphotographie löst, hat begreiflicherweise eine große Reihe von Laboratoriumsuntersuchungen gezeitigt. So macht, um einige Untersuchungen aus den letzten Jahren zu nennen, Guébhard[1]) auf einige Schwierigkeiten aufmerksam, die sich aus der individuellen Empfindlichkeit jeder Platte für die einzelnen Farben des Spektrums ergeben, namentlich aber auch aus der Ungleichheit der Schwärzungskurven, welche die Schwärzungen als Funktionen der Intensität darstellen; diese Kurven sind nämlich für die einzelnen Wellenlängen wesentlich verschieden. Eine sehr eingehende Untersuchung über die mikroskopische Struktur der Autochromplatte hat Scheffer[2]) angestellt, wobei sich u. a. ergab, daß die schwarzen entwickelten Silberkörner kleiner sind als die Filterkörner.

Der Autochromprozeß kommt auf eine Zerlegung in Teilbilder heraus, welche aus einzelnen Punkten zusammengesetzt sind. Indes kann eine solche Zerlegung auch in anderer Weise stattfinden, wenn nur die Zwischenräume zwischen den einzelnen Teilbildern klein genug sind, um dem Auge einen lückenlosen Gesamteindruck des einzelnen Teilbildes für sich zu gewähren. In diesem Falle werden sich immer die nebeneinander liegenden Farben additiv zu einem einheitlichen Gesamteindruck vereinigen. So hat man schon lange, einer Anregung von

1) Eders Jahrb. f. Photographie 1908, S. 164.
2) Eders Jahrb. f. Photographie 1908, S. 96.

Ducos de Hauron folgend, sich bemüht, die Zerlegung in Teilbilder mit Hilfe von einzelnen farbigen, nebeneinander angeordneten Linien vorzunehmen. Diese Liniensysteme werden in Anlehnung an einen in der Drucktechnik üblichen Ausdruck als „Linienraster" bezeichnet. Die Hauptschwierigkeit ist gerade wie bei der Zerlegung der Farbplatte in punktförmige Elemente auch hier bei der Zerlegung in lineare Elemente eine technische. Es fragt sich vor allem wie man ein Liniensystem in einer Weise herstellt, bei der sich die Nachbarlinien nicht überdecken, da infolge einer Überdeckung die Synthese zum Teil subtraktiv verlaufen würde; man muß aber (ebenso wie beim Punktraster) auch dafür sorgen, daß kein Zwischenraum zwischen den einzelnen farbigen Linien bleibt, durch welchen weißes Licht hindurchtreten könnte; dadurch würde natürlich die Sattheit der Farben leiden. Solche Raster wurden zuerst von Jolly in England und Mc Donough in Amerika hergestellt. Neuerdings sind namentlich zwei Herstellungsmethoden der Raster in den Vordergrund getreten, der Warner-Powrie-Prozeß und derjenige der Omnicolore- oder Jouglaplatte. Beim Warner-Powrie-Prozeß wird eine Bichromatgelatineschicht unter einem System von abwechselnd durchsichtigen und undurchsichtigen Parallellinien belichtet, wobei die undurchsichtigen Linien die doppelte Breite der durchsichtigen haben. An den durchsichtigen Stellen wird die Bichromatgelatine unlöslich, während sie an den undurchsichtigen mit warmem Wasser weggelöst werden kann. Die verbleibenden Gelatinestreifen werden mit einem grünen Farbstoff eingefärbt und die Färbung mit Tannin fixiert. Die Platte wird nun noch einmal mit der lichtempfindlichen Bichromatgelatineschicht überzogen und in analoger Weise erst das rote und dann das blaue Liniensystem hergestellt. Die weitere Behandlung der Schicht (Überziehen mit panchromatischer Emulsion) und Herstellung der Bilder ist analog wie bei dem Autochromprozeß, von dem sich das Verfahren nur durch die Art der Filterelemente unterscheidet.

Wenn die Reproduktionsfilter nicht wie bei dem geschilderten Verfahren nebeneinander, sondern übereinander angeordnet werden, also bei der subtraktiven Synthese, so gelten andere Regeln für das Verhältnis von Aufnahme- und Reproduktionsfiltern. Diese können so formuliert werden, daß für eine wirklich panchromatische Platte das Aufnahmefilter spektral komplementär zu der Farbe des Reproduktionsfilters bzw. der Druckfarbe (wenn nämlich die drei Teilbilder übereinander gedruckt werden) sein muß. In Wirklichkeit aber werden die Verhältnisse durch die Individualität des Sensibilisators komplizierter. Allerdings kommt man bezüglich des Farbensystems der Aufnahmefilter praktisch meist mit dem in der additiven Synthese angewandten aus.

Wir wollen von den drei Farbendrucken, welche nur in einem losen Zusammenhang mit der eigentlichen Farbenphotographie stehen, absehen und uns auf die subtraktiven Einzelkopien im Sinne der eigentlichen Photographie beschränken. Bei der Herstellung derselben wird überwiegend von den Eigenschaften der Bichromatgelatine Gebrauch gemacht, welche nach der Belichtung nicht nur, wie bereits erwähnt, ihre Quellbarkeit, sondern zugleich auch ihre Löslichkeit in Wasser verliert und weiterhin an den belichteten Stellen der Anfärbung durch Farbstoffe wie auch andererseits der Entfernung bereits vorhandener Farbstoffe größeren Widerstand entgegensetzt. So werden neuerdings mit Gelatine überzogene Folien in den Handel gebracht, die vor dem Gebrauch durch Baden in Bichromatlösung zu sensibilisieren sind. Nach der Belichtung werden sie mit warmem Wasser entwickelt, wobei sich die unbelichteten Partien auflösen. Wird nunmehr die farblose Folie in einem geeigneten Farbstoff (dessen Farbe also bei idealer Sensibilisierung zu der des Aufnahmefilters komplementär ist) gebadet, so nehmen nur die von der Gelatine noch bedeckten Stellen den Farbstoff auf, und es resultiert ein farbiges Teilbild. Die drei Teilbilder werden dann aufeinander gepaßt, und durch ihre Gesamtwirkung hat man eine subtraktive, farbengetreue Synthese des ursprünglichen Objektes.

Während hierbei zur Herstellung jeder einzelnen Kopie die drei Teilnegative und die Farbbäder jedesmal von neuem benutzt werden müssen, ist neuerdings ein Verfahren angegeben worden, bei dem von den drei Teilnegativen drei mit Farbstoffen imprägnierte Druckplatten hergestellt werden, die, wie es bei der Hektographie üblich ist, den betreffenden Farbstoff auf Vorrat enthalten. Werden diese aus Zelluloid bestehenden farbstoffreichen Platten mit Gelatine in Kontakt gebracht, so geben sie an dieselbe den Farbstoff durch Diffusion ab, wodurch nun die eigentlichen Teilbilder entstehen. Indem man sie übereinander klebt, erhält man die Einzelkopie. Das Verfahren ist zuerst von Sanger-Shepherd im Jahre 1902 vorgeschlagen und dann weiter durch die Höchster Farbwerke unter dem Namen Pinatypie ausgearbeitet worden.

Nicht von der Lichtempfindlichkeit der Chromatgelatine, sondern derjenigen von Silbersalzen macht eine von A. Traube unter dem Namen Diachromverfahren eingeführte Kopiermethode Gebrauch, bei welcher nach den drei Teilnegativen zunächst drei Teildiapositive hergestellt werden. Diese werden in Jodsilber

übergeführt, welches die Eigentümlichkeit besitzt, Farbstoffe aufzunehmen. Endlich wird das Jodsilber entfernt, und der als Lack fixierte Farbstoff stellt das Teilbild dar.

Eines der subtraktiven Kopierverfahren, die sog. Pinachromie, führt den einzelnen Teilbildern keinen fertigen Farbstoff zu, sondern läßt denselben erst im Lichte entstehen. Die Leukobasen organischer Farbstoffe werden im Lichte wesentlich leichter oxydiert als im Dunkeln, und so in die betreffenden Farbstoffe verwandelt. Wenn man die Leukobase in eine Schicht von Salpetersäureestern von Glyzerin, Mannit und Glukose einbettet, so geht diese Oxydation hinreichend schnell vor sich, um ein Kopierverfahren darauf zu gründen. Man braucht nur unter jedes der drei Teilnegative eine Schicht zu bringen, die mit der Leukobase eines Farbstoffes von derjenigen Nuance imprägniert ist, welche das Teilbild gemäß dem gewählten Grundfarbensystem annehmen muß, und die drei Teilbilder aufeinander zu passen. Dies geschieht in der Weise, daß zunächst das blaue Teilbild erzeugt wird; man fixiert, indem man die unveränderte Leukobase mit Monochloressigsäure auszieht. Dann wird die Schicht mit einer Schutzschicht aus gehärteter Gelatine überzogen. Auf dieser wird nunmehr in genau der gleichen Weise die rote Teilschicht und endlich ebenso die gelbe Teilschicht erzeugt.

(Eingegangen 6. August 1909.)

PHYSIKALISCHE TECHNIK.

Kalziumkarbid als Trockenmittel bei elektrostatischen Arbeiten.

Von Th. Wulf.

Als Trockenmittel bei elektrostatischen Arbeiten verwendet man meistens metallisches Natrium. Solange Natrium rein ist, wirkt es in der Tat ausgezeichnet. In sehr feuchter Luft überzieht es sich bald mit einer feuchten Schicht Natriumhydroxyd und wirkt dann bedeutend langsamer. Ich kam dann auf den Gedanken, Kalziumkarbid zu versuchen, welches ja ebenfalls sehr stürmisch Wasser zersetzt. Der Geruch des erzeugten Gases wird zwar zuweilen seiner Anwendung besonders im Laboratorium entgegenstehen, aber im Freien spielt das keine Rolle. Häufig ist auch der Apparat gut verschlossen und handelt es sich nur darum, dauernd alle Spuren von Feuchtigkeit fern zu halten. In diesen Fällen leistet Karbid sehr gute Dienste. Ich habe es zum Beispiel in dem von mir konstruierten Apparat[1]) zur Messung der γ-Strahlen radioaktiver Stoffe verwendet. Einige Stücken Karbid erhielten sich wochenlang in dem Trockengefäß, obwohl der Apparat auch bei strömendem Regen im Freien blieb.

Der Hauptvorzug des Karbids vor dem Natrium liegt darin, daß die verbrauchte Masse als trockenes Pulver meist zu Boden fällt und die wirksamen Oberflächen frei läßt. Außerdem ist es in der Aufbewahrung und Behandlung viel weniger anspruchsvoll und endlich kann man es dank der großen Verbreitung der Fahrräder fast überall erhalten.

Ein einfacher Versuch, der jedoch keinen Anspruch auf Genauigkeit macht, bewies, daß das Karbid dem *Na* zum wenigsten gleichwertig ist. Unter einer luftdicht schließenden Glasglocke befand sich ein Lambrechtsches Haarhygrometer. Mittels eines Zirkulationsgebläses wurde die Luft durch eine Wasserflasche getrieben, bis das Hygrometer 100 Proz. Feuchtigkeit anzeigte. Alsdann wurden durch ein oben eingesetztes, etwa 60 cm langes Glasrohr das eine Mal 6 Stückchen Karbid und bei einem folgenden Versuche ebensoviel Natrium von beiläufig gleicher Größe hineingeworfen. Der Rückgang der relativen Feuchtigkeit erfolgte in der ersten Stunde ungefähr gleich, später aber gewann das Karbid einen merklichen Vorsprung, wie folgende Zahlen zeigen.

Die Zahlen geben die Angaben des Hygrometers verschiedene Stunden nach Einführung der Trockensubstanz.

Zeit: Stunden	0	1	2	4	6	9	12	18	24
Natrium . .	100	72	54	40	33	26	21	15	13
Karbid . .	100	71	49	33	26	18,5	13	7,5	5

Aus der Tabelle folgt mindestens, daß man mit Kalziumkarbid ebenso schnell einen hohen Grad von Trockenheit erzielt, als mit metallischem Natrium.

Valkenburg, Phys. Instit. des Ignatius-Kollegs, 16. September 1909.

(Eingegangen 23. September 1909.)

1) Th. Wulf, diese Zeitschr. 10, 152, 1909.

Über eine einfache und auf größere Entfernungen brauchbare mechanische Kraftübertragung für rasch rotierende Apparate von geringer Leistung.

Von G. Rempp und R. Wenger.

Bei Versuchen, die den Betrieb eines Ventilators durch einen in größerem Abstand davon befindlichen kleinen Elektromotor bezweckten

— es handelte sich um den Motor und zugehörigen Ventilator unseres Meteorographen für bemannte Ballons (s. Katalog der Firma J. und A. Bosch, Straßburg) — konnten wir feststellen, daß der gewünschte Zweck sich sehr leicht und auf überraschend große Entfernungen einfacher mittels eines dünnen und elastischen Drahtes erreichen ließ, dessen Enden in geeigneter Weise an den Achsenenden der beiden Apparate befestigt waren, ein Verfahren, das für ganz kleine Entfernungen ja schon üblich ist. Unter Verwendung eines 0,3 mm-Bronzedrahtes gelang uns bei unseren Versuchen die Übertragung der Bewegung ohne Schwierigkeit auf 100 m, wobei, was erschwerend ins Gewicht fällt, der Draht zwischen nahezu gleich hohen Punkten ausgespannt war. Innerhalb gewisser Grenzen war die Spannung des Drahtes ohne Einfluß; übermäßige Vergrößerung derselben erhöhte selbstverständlich in unzulässigem Maße die Reibung in den Achsenlagern, während bei allzu starkem Nachlassen ein größerer Teil der Energie von den stehenden Schwingungen absorbiert zu werden schien, die sich auf dem Drahte ausbildeten, und deren Amplitude normalerweise noch nicht 1 cm betrug. Schon durch Führung mit der Hand konnte der Draht im rechten Winkel abgelenkt werden; wurde er durch eine Drahtspirale gezogen, so konnte er, ohne daß die Übertragung merklich darunter litt, zu einem Kreise von ca. 40 cm Durchmesser herumgebogen werden.

Die geschilderte Art der Kraftübertragung erscheint in erster Linie geeignet für Ventilatoren an Thermographen und Hygrographen zu meteorologischen und technischen Zwecken, sowie an luftelektrischen Apparaten, in Fällen, wo die Art des zur Verfügung stehenden Motors die Anbringung desselben unmittelbar an den Apparaten verbietet.

Straßburg i. E., Meteorologische Landesanstalt, September 1909.

(Eingegangen 27. September 1909.)

BESPRECHUNGEN.

Marcel Brillouin, Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz. In 2 Teilen. Gauthier-Villars, Paris 1907

M. Brillouin ist nicht nur einer der fähigsten von den jüngeren französischen Theoretikern, sondern er ist auch überaus geschickt und klar in der Darstellung und in der Diskussion der experimentellen Methoden. Das zeigt sich in besonders hohem Maße in den vorliegenden „Vorlesungen über die Viskosität der Flüssigkeiten und Gase", die, obgleich hohe Anforderungen an den Hörer bzw. Leser stellend, nach beiden Seiten hin als mustergültig bezeichnet werden dürfen.

Wer sich (gleichviel ob theoretisch oder praktisch) mit Problemen der inneren Reibung bei Flüssigkeiten oder Gasen befaßt, sollte nicht versäumen, die Brillouinsche Darstellung einzusehen, die nach beiden Richtungen hin reiche Anregung und eine Fülle nützlicher Kenntnisse vermittelt und besonders wegen der außerordentlichen Belesenheit des Verfassers von Nutzen ist.

E. Bose.

F. Stolze, Die Panoramenapparate in ihren Vorzügen und Mängeln sowie ihre Verwendung in der Praxis. (Encyklopädie der Photographie. Heft 64.) Halle a. S., W. Knapp. 1909. M. 3.—

Die beiden menschlichen Augen bestreichen zusammen einen weit größeren Bildwinkel, als eines der gewöhnlichen, namentlich älteren Objektive liefert. Die künstliche Erweiterung dieses Bildwinkels ist Aufgabe der sogenannten Panoramenapparate. Verfasser, der bei der Ausbildung des diesbezüglichen Systems selbst mitgewirkt hat, schildert zunächst die historische Entwicklung des Gebietes, um sich dann namentlich den Eigentümlichkeiten zuzuwenden, die hier bezüglich der Perspektive entstehen. Die beiden Haupttypen der Apparate benutzen entweder einen während der Aufnahme zylindrisch gelagerten Film oder einen solchen, der sich während des Rotierens des Objektivs zwischen zwei Filmrollen ab- und aufrollt. Von Verwendungsarten in der Praxis wird speziell auf Panoramenaufnahmen für Photogrammetrie und für Zwecke der Luftschiffahrt eingegangen.

Byk.

C. G. Knott, The physics of earthquake phenomena. gr. 8. XII u. 283 S. mit 44 Figuren. Oxford, The Clarendon Preß. 1908. 14 sh. net.

Die Einleitung bemerkt, daß das vorliegende Werk einem in Aberdeen 1905—06 gehaltenen Kolleg über Erdbebenkunde entspricht, dem ersten in England über dies Thema gehaltenen. Verfasser beschränkt sich auf solche Erscheinungen, die physikalischer Natur sind oder physikalisches Interesse bieten. Die Darstellung ist, was Formelsprache anbetrifft, elementar, doch ist der Text vielfach eine in Worte gesetzte Formel und verlangt viel physikalische Auffassungsgabe, da eine eben gegebene physikalische Deutung von nun an als bekannt an-

genommen wird, so daß in wenigen Abschnitten sehr viel enthalten ist. Dies gilt besonders von den Kapiteln über die Elastizität der Erde, die elastischen Wellen in ihr und über seismische Strahlen. Die zwei Kapitel über periodische Phänomene sind typisch englisch; in ihnen spielt die harmonische Analyse eine große Rolle, jedoch nicht in der unüberlegten Weise, wie sie früher angewandt wurde, sondern unter der Kritik der Schusterschen Periodographenprobe.

Unter den erwähnten Instrumenten steht der Milneapparat im Vordergrunde, Wiecherts Pendel ist nur in der Einleitung, da allerdings auch besonders hervorgehoben. Das Buch stellt naturgemäß den Stand des Wissens dar, auf den der Verfasser unsere Kenntnis der Erdbebenphänomene in seiner langjährigen Tätigkeit in Japan gehoben hatte. A. Nippoldt.

J. Joly, Radioactivity and geology. An account of the influence of radioactive energy on terrestrial history. 8. XI u. 287 S. mit 2 Tafeln. London, A. Constable & Co. Ltd. 1909. 7 sh 6 d no.

Die 12 Kapitel des recht anregend geschriebenen Buches behandeln etwa folgendes:

1. Grundlagen der Radiologie. Theorie der radioaktiven Umwandlung. Wärmetönungen. Beziehungen zwischen Radium und Uranium. Stellung von Ionium und Aktinium.

2. Prinzipien der Messung bezw. Schätzung kleiner Radiummengen in der Erde. Einfluß von hohen Drucken und Temperaturen.

3. Radium in Gesteinen und im Wasser der Erdrinde. Mügges Beobachtungen und Versuche zur Erklärung der pleochroitischen Höfe.

4. Geothermische Tiefenstufen, Wärmeleitfähigkeiten und Radioaktivität. Beobachtungen im Simplontunnel und im Gotthard.

5. Instabilität der Erdrinde. Periodizität der Gebirgsbildung und Beziehungen der letzteren sowie der Geosynklinalen und der Erdbeben zur Erdradioaktivität.

6. Instabilität des Meeresbodens, Sedimentation und Meeres-Transgression.

7. Radioaktivität und neuere Auffassungen der alpinen Tektonik.

8. Radioaktivität, Erwärmung der Erde und Erdabkühlung. Theorie von Lord Kelvin.

9. Dicke der radioaktiven Erdzone. Anreicherung von Uranium in der Erdrinde.

10. Radioaktivität der Atmosphäre. Radiumemanation und Thoriumemanation.

11. Das Alter der Minerale und der Erde.

12. Praktische Messung der Radioaktivität.

Johnsen.

J. N. Friend, The theorie of valency. (Text-Books of physical chemistry by W. Ramsay.) 8. XIV u. 180 S. London, E. C. 39 Paternoster Row, Longmans, Green, and Co. 1909. 5 sh.

Ramsays Textbook-Cyklus ist hier des öfteren eingehend behandelt worden. Es handelt sich in dem vorliegenden Bändchen um einen wesentlich chemischen Gegenstand, die Valenztheorie, deren Darstellung sich den übrigen Teilen des Ganzen in angemessener Weise einfügt. E. Bose.

Tagesereignisse.

In England wurde der Grundstein zu dem ersten Radiumwerk gelegt. Die Grundsteinlegung wurde von Lady Ramsay vollzogen, die in Begleitung von Sir William Ramsay erschienen war. Man erwartet für die ersten Jahre eine Leistungsfähigkeit von 5—6 g Radium jährlich.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Aachen Dr. Alois Timpe für Mechanik, an der Technischen Hochschule Hannover Dr. Decker für Chemie, an der Universität Königsberg Dr. Theodor Kaluza für reine und angewandte Mathematik, an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. J. Wallot für Physik.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag Dr. Rudolf Saliger zum ord. Professor für Mechanik an der Technischen Hochschule in Wien, der a. o. Professor Dr. Gerhard Kowalewski in Bonn zum ord. Professor der Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag als Nachfolger von Professor Dr. Anton Grünwald, der a. o. Professor Dr. Alfred Denizot an der Technischen Hochschule zu Lemberg zum ord. Professor für allgemeine und analytische Mechanik ebendaselbst, der a. o. Professor Dr. phil. Zdislaw Krygowski an der Technischen Hochschule zu Lemberg zum ord. Professor der Mathematik ebendaselbst.

Verliehen: Dem ord. Professor und Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Kiel Dr. Konrad Dieterici der Charakter als Geh. Regierungsrat.

Neuer Lehrauftrag: An der Universität London Ingenieur A. P. Thurston für Luftschiffahrt und Aviatik.

Verzicht auf venia legendi: Der Privatdozent der Chemie an der Universität Straßburg Dr. Wilhelm Köhl.

Gestorben: Der Leiter des Meteorologischen Observatoriums der Firma Karl Zeiß in Jena Physiker Dr. Paul Riedel.

Gesuche.

Große Metallfadenlampenfabrik

sucht zum baldigen Antritt tüchtigen

Physiker

mit abgeschloss. Hochschulbildung als Assistenten. Ausführl. Offerten mit Darlegung des Studienganges, Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Gehaltsansprüchen unter **S. H. # 308** an die Exp. ds. Blattes.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Friedrich Krüger in Danzig-Langfuhr. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

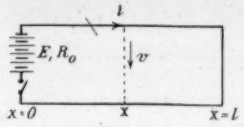


Fig. 1.

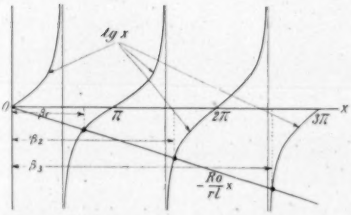


Fig. 2.

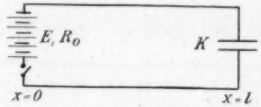


Fig. 3.

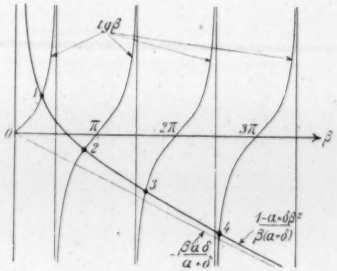


Fig. 4.

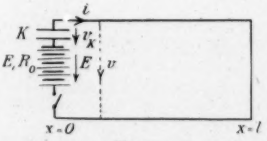


Fig. 5.

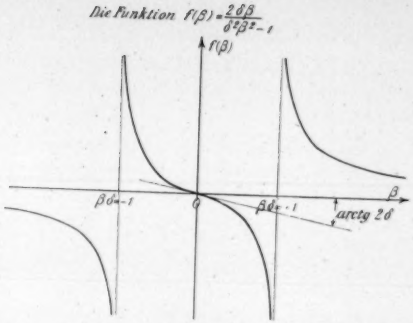


Fig. 6.

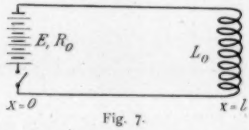
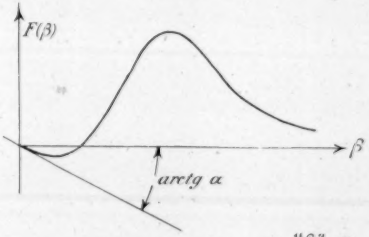


Fig. 7.



Die Funktion $F(\beta) = \beta \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha}}{1 + \alpha \sqrt{\beta^4}}$

Fig. 8.

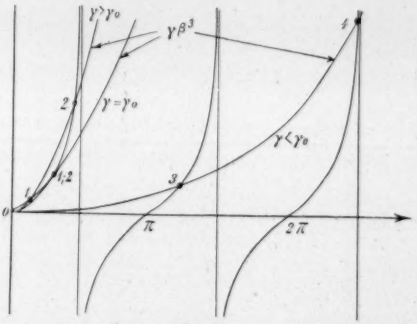


Fig. 9.

ONLINE LIBRARY

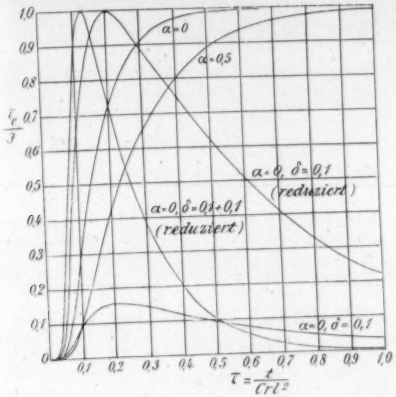


Fig. 10.

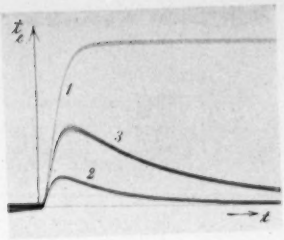


Fig. 13.

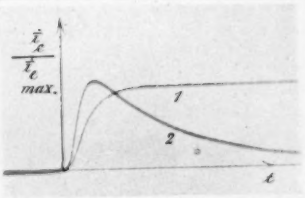


Fig. 14.

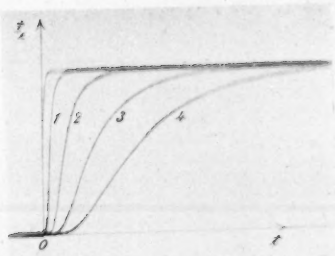


Fig. 11.

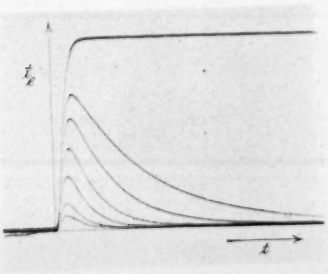


Fig. 15.

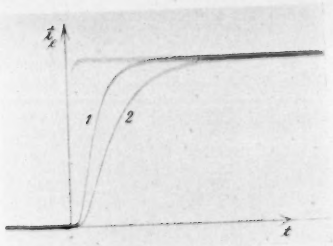


Fig. 12.

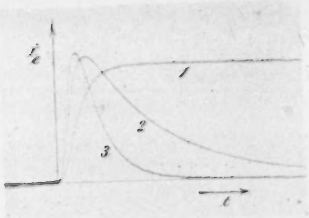


Fig. 16.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

OPEN UNIVERSITY COLLEGE LIBRARY

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

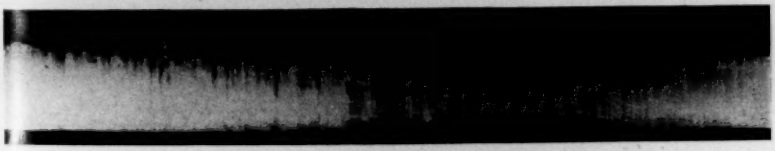


Fig. 6.

Fig. 7.

OBERLIN COLLEGE LIBRARY